KATEGORIEN MIT AUSGEZEICHNETEN MORPHISMENKLASSEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter Faehling
aus Berlin

1973

KATEGORIEN MIT AUSGEZEICHNETEN MORPHISMENKLASSEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter Faehling
aus Berlin

1. Referent: Prof. Dr. G. Preuß

2. Referent: Prof. Dr. H. Pachale

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 30. JAN. 1973

INHALT

Seite

Einleitung..... 2

1. Kategorien mit ausgezeichneten Morphismenklassen.. 6
1.1. S-Klasse, 1.3. E-verbunden, 1.4. E-Injektivität und -Projektivität, 1.9. Kleinheitsbedingungen, 1.12. die Funktoren G und F, die Trägerunterkategorien $\underline{G}$ und $\underline{F}$, 1.17. E-Kategorien, Einheitenklasse.

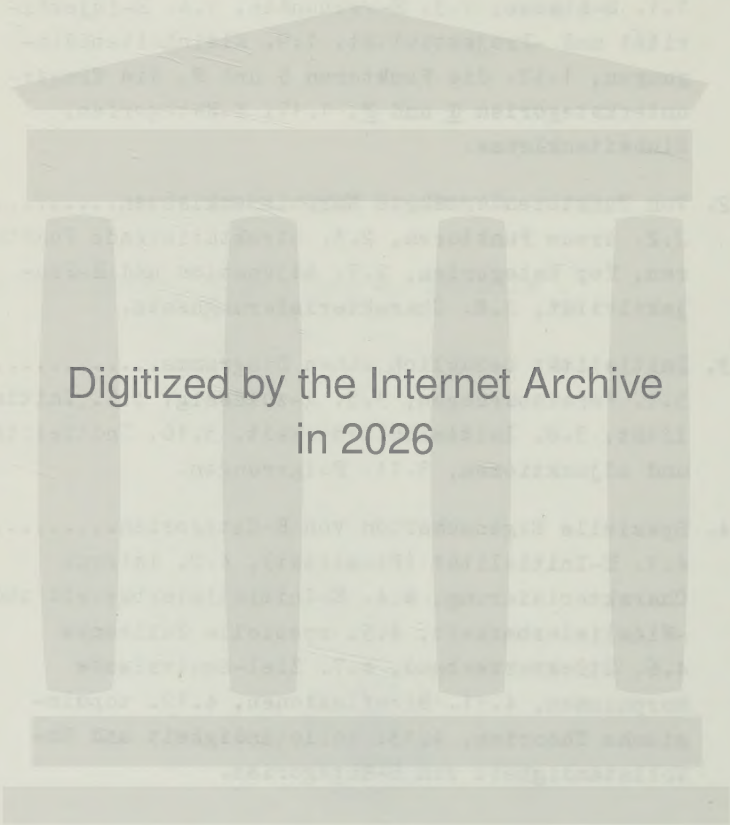
2. Von Funktoren erzeugte Morphismenklassen..... 18
2.2. treue Funktoren, 2.3. strukturierende Funktoren, Top Kategorien, 2.7. Adjunktion und E-Projektivität, 2.8. Charakterisierungssatz.

3. Initialität bezüglich eines Diagramms..... 25
3.1. Vereinbarungen, 3.3. g-zulässig, 3.5. Initialität, 3.8. Initialisierbarkeit, 3.10. Initialität und Adjunktionen, 3.11. Folgerungen.

4. Spezielle Eigenschaften von E-Kategorien..... 33
4.1. E-Initialität (Finalität), 4.2. interne Charakterisierung, 4.4. E-Initialisierbarkeit und -Finalisierbarkeit, 4.5. spezielle Pullbacks 4.6. Strukturverband, 4.7. Ziel-äquivalente Morphismen, 4.11. Bireflexionen, 4.12. topologische Theorien, 4.13. Vollständigkeit und Co-Vollständigkeit von E-Kategorien.

Literatur..... 52

Symbole..... 53



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552710_0083

EINLEITUNG

Hüllen-Strukturen (closure-spaces), semi-uniforme Räume (s.ČECH [2]), topologische Räume, uniforme Räume, Proximitätsstrukturen (s.PREUSS [9]), Limesräume (s.FISCHER [5]), uniforme Limesräume (s.COOK u. FISCHER [3]), quasi-uniforme Räume und syntopogene Strukturen (s.CSÁSZÁR [4]), sind Beispiele für topologische Strukturen im weiteren Sinne.

In diesen Theorien werden Strukturen auf einer Trägermenge betrachtet und es wird erklärt, welche Abbildungen strukturverträglich sind. Das konkrete Prinzip, von einer Grundkategorie (etwa der Kategorie der Mengen oder der Gruppen) auszugehen, deren Objekten eine Struktur aufzuprägen und dann Paare, bestehend aus Träger und Struktur, als Objekte einer neuen Kategorie anzusehen, wird für topologische Strukturen im weiteren Sinne durch das Konzept der Top Kategorien (s.WYLER [10]) verallgemeinert. Dabei wird durch den als topologische Theorie bezeichneten kontravarianten Funktor von einer Kategorie $\underline{A}$ in die Kategorie der vollständig geordneten Mengen, wobei die Bilder von Morphismen Abbildungen sind, die Infima bewahren, jedem Objekt aus $\underline{A}$ ein vollständiger Verband zugeordnet. Die Objekte der Top Kategorie, die zu einer topologischen Theorie gehört, werden dann als Paare bestehend aus einem Objekt aus $\underline{A}$ und einem Element des zugeordneten Verbandes gebildet und die Morphismen werden aus den Morphismen von $\underline{A}$ gebildet mit gewissen Verträglichkeitsbedingungen, die durch die topologische Theorie bestimmt sind.
Eine andere Möglichkeit liegt darin, spezielle Eigenschaften des Vergißfunktors kategoriell zu untersuchen. Auf dieser Grundlage findet man eine kategorielle Analyse des Strukturbegriffes allgemein bei OSIUS [8] und mehr in Hinblick auf die Topologie z.B. im Anhang des Buches von

ČECH [2] und in einer Arbeit von HUŠEK [6] .

Wir fragen nun nach internen Eigenschaften, die Kategorien topologischer Strukturen im weiteren Sinne kennzeichnen. Wir gehen so vor, daß wir in einer Kategorie $\underline{K}$ eine Klasse E von Morphismen auszeichnen, die gewissen Bedingungen (1.1.) genügt, welche selbstdual sind. Mindestens eine solche strukturierende Klasse - oder kurz S-Klasse - gibt es in jeder Kategorie, nämlich die Klasse der Identitäten. E erzeugt auf der Objektklasse eine Ordnung $\leq_E$(1.2.). Gilt $K \leq_E K'$, so nennen wir K feiner als K' und K' gröber als K. Wir fassen alle Objekte, die mit einem Objekt K E-verbunden sind (1.3.), zu einer Klasse V(K) (1.4.) zusammen. Gibt es in jeder solcher Klasse ein gröbstes Element, so sagen wir E erfüllt (G) (1.7.). Ist dies Element E-injektiv (1.5.), so sagen wir, daß (I) erfüllt ist. Die dualen Eigenschaften werden mit (F), (P) bezeichnet. In einer Kategorie mit S-Klasse E, die (G), (I), (F) und (P) erfüllt, erhalten wir zwei treue, idempotente Endofunktoren G und F, die zwei Trägerunterkategorien $\underline{G}$ und $\underline{F}$ bestimmen (1.12.). $\underline{G}$ liegt bireflektiv und $\underline{F}$ bicoreflektiv in $\underline{K}$, beide Unterkategorien sind isomorph und der Funktor F ist linksadjungiert zu G. Zusätzliche Eigenschaften, so das Axiom (Iso), welches garantiert, daß die Klasse E Isomorphismen respektiert (1.15.) und eine Kleinheitsbedingung (K), die fordert, daß V(K) eine Menge ist (1.10.), führen zum Begriff der E-Kategorie (1.17.).

Den Zusammenhang mit Funktoren liefert das zweite Kapitel, in dem wir Morphismenklassen untersuchen, die von Funktoren erzeugt werden. Mit den dort entwickelten Kriterien können wir nachweisen, daß jede Top Kategorie eine E-Kategorie ist (2.3.). Weiter wird der Zusammenhang zwischen E-Projektivität und Adjunktion hergestellt (2.7.), der zur äquivalenten Charakterisierung von E-Kategorien dient (2.8.).

Initialität (Finalität) spielt für alle topologischen Strukturen eine große Rolle, insbesondere bei Limes- und Colimesbildung im kategoriellen Sinne. Wir unterscheiden zwischen schwacher und starker Initialität (3.4.), wobei diese Begriffe für vollständige E-Kategorien äquivalent sind (4.9.). Wir definieren Initialität für ein Diagramm (3.5.) und haben durch diese Allgemeinheit die Möglichkeit, kategorielle Methoden (Kommakategorien, Adjunktionen) zu benutzen, die schon zur Verfügung stehen. So gelingt es, die starke Initialisierbarkeit einer Kategorie äquivalent durch Rechtsadjunktion zwischen Kommakategorien zu charakterisieren (3.10.). In dem Spezialfall, daß T ein treuer Funktor ist (3.6.), stimmt die starke Initialität mit der direkten kategoriellen Übertragung der BOURBAKIschen Definition ([1] S.274ff.), die z.B. in [2] und [8] zu finden ist, überein. Dies kommt besonders dann zum Tragen, wenn Limites betrachtet werden (4.3.). Die Methoden sind ausführlich in Kapitel 3 enthalten.

In E-Kategorien ist Initialität eine interne Eigenschaft, die mit E-Initialität (dual: E-Finalität) bezeichnet wird (4.1.) und es bestehen weitere Möglichkeiten der Charakterisierung. So ist ein Objekt genau dann stark E-initial, wenn es Limes eines erweiterten Diagramms ist (4.2.).

E-Kategorien mit verallgemeinerten Pullbacks haben bedeutende Eigenschaften. Sie sind stark E-initialisierbar und gleichzeitig stark E-finalisierbar (4.1., 4.4.) und jedes Objekt besitzt einen vollständigen Strukturverband, in dem sich Infima als kategorielle Limites und Suprema (im Falle der Covollständigkeit der Kategorie) als kategorielle Colimites darstellen lassen (4.6.), und jede E-Kategorie mit verallgemeinerten Pullbacks läßt sich als Top Kategorie auffassen (4.12.). Wir erhalten also in einer vollständigen E-Kategorie einen vollständigen Strukturverband V(K) und in gewisser Weise ist eine Umkehrung möglich (4.13.).

Setzt man die Vollständigkeit der Trägerunterkategorie $\underline{G}$ von $\underline{K}$ und die Existenz inverser Bilder von „Strukturen" voraus, und ist $V(K)$ bezüglich $<_E$ derart im verbandstheoretischen Sinne vollständig, daß es zu einer Familie von Morphismen, die von einem Objekt ausgehen, in Objekte, die denselben Träger besitzen (d.h. alle aus einem $V(K)$ stammen, s. Ziel-äquivalente Morphismen (4.7.)), einen Morphismus in das Infimum gibt, dann ist auch $\underline{K}$ vollständig. Ist $\underline{G}$ zusätzlich covollständig, so folgt auch die Covollständigkeit von $\underline{K}$ (4.14.).

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof.Dr.G.Preuß für die Betreuung dieser Arbeit herzlich danken.

1. Kategorien mit ausgezeichneten Morphismenklassen

Wir wollen in einer Kategorie $\underline{K}$ eine Klasse von Morphismen auszeichnen, die Analoges leistet, wie die Identitäten auf einer strukturierten Menge, d.h. wir fassen axiomatisch diejenigen Morphismen zusammen, die im konkreten Fall die identischen Abbildungen von einer feineren zu gröberen Struktur derselben Trägermenge darstellen.

1.1. Definition: $\underline{K}$ sei eine Kategorie und $E \subset \mathrm{Mor}\underline{K}$. E heißt strukturierende Klasse, wenn gilt:

(1) $E \subset \mathrm{Bim}\underline{K}$, d.h. alle Elemente von E sind Bimorphismen.

(2) E soll kompositionsabgeschlossen sein, d.h. aus $e_1, e_2 \in E$ und $e_1 \; e_2 \in \mathrm{Mor}\underline{K}$ folgt $e_1 e_2 \in E$

(2') Aus $e_1 e_2 \in E$ und $e_2 \in E$ soll folgen $e_1 \in E$ und es soll die dazu duale Aussage gelten, d.h. ist das Kompositum zweier Morphismen, von denen einer in E liegt, in E enthalten, so liegt der andere ebenfalls in E.

(3a) $E \cap \mathrm{Iso}\underline{K} = \mathrm{Id}\underline{K}$

(3b) $E \cap \mathrm{Mor}(K,K')$ ist höchstens einelementig für alle $K, K' \in \mathrm{Obj}\underline{K}$.

Wir nennen eine strukturierende Klasse E kurz S-Klasse. Die Axiome für eine S-Klasse sind selbstdual; ist E eine S-Klasse in $\underline{K}$, dann auch in $\underline{K}^d$, der dualen Kategorie. Eine S-Klasse liefert uns nun eine Ordnung auf der Objektklasse der Kategorie:

1.2. Lemma: $E \subset \mathrm{Mor}\underline{K}$ sei S-Klasse in der Kategorie $\underline{K}$, dann ist - $K \leq_E K'$ genau dann, wenn es ein $e \in E$ mit $e \in \mathrm{Mor}(K,K')$ gibt - eine reflexive, antisymmetrische und transitive Ordnung auf $\mathrm{Obj}\underline{K}$.

Beweis: Reflexivität ist durch (3a), Transitivität durch (2) garantiert. Sei $K \leq_E K'$ und $K' \leq_E K$; d.h. es gibt $e, e' \in E$ mit $e \in \mathrm{Mor}(K,K')$ und $e' \in \mathrm{Mor}(K',K)$, woraus nach (2) $e'e \in \mathrm{Mor}(K,K) \cap E$ und damit nach (3b) und (3a) $e'e = 1_K$ folgt. Damit ist e Epi und Coretrakt, d.h. $e \in \mathrm{Iso}\underline{K}$ und nach (3a) ist $e = 1_K$ also $K = K'$.

Gilt $K \leq_E K'$, so sagen wir, K ist feiner als K' und K' ist gröber als K.

Um die Aussage - zwei strukturierte Mengen haben denselben Träger - kategoriell fassen zu können, führen wir den nachstehenden Begriff an:

1.3. Definition: $\underline{K}$ sei eine Kategorie mit S-Klasse E, zwei Objekte heißen E-verbunden, in Zeichen: KEK', wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und $K_i \in \mathrm{Obj}\underline{K}$, $i = 1,\ldots,n$ mit $K_1 = K$, $K_n = K'$ gibt, so daß $(\mathrm{Mor}(K_i, K_{i+1}) \cup \mathrm{Mor}(K_{i+1}, K_i)) \cap E \neq \emptyset$ gilt.

1.4. Bemerkung: K E K' liefert eine Äquivalenzrelation, was aus den Axiomen für eine S-Klasse folgt. Die Äquivalenzklasse eines Objektes K wird mit V(K) bezeichnet. Die Eigenschaft, E-verbunden zu sein, ist selbstdual.

Injektivität (Projektivität) eines Objektes in einer Kategorie wird im allgemeinen bezüglich Monomorphismen (Epimorphismen) definiert; wir benötigen diesen Begriff bezüglich einer Klasse von Morphismen:

1.5. Definition: $\underline{K}$ sei eine Kategorie, $E \subset \mathrm{Mor}\underline{K}$. Ein Objekt $K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ heißt E-injektiv, wenn es zu jedem $k \in \mathrm{Mor}(L,K)$ und jedem $e \in \mathrm{Mor}(L,M)$ mit $e \in E$ ein $k' \in \mathrm{Mor}(M,K)$ mit $k'e = k$ gibt. Ein Objekt heißt E-projektiv, wenn es E^d-injektiv in der dualen Kategorie ist.
Ist E eine S-Klasse, dann ist die E-Injektivität eine "eingeschränkte" Injektivität und der Morphismus k' ist eindeutig bestimmt, da e ein Epimorphismus ist.

1.6. Bemerkung: Ist $D : \underline{I} \longrightarrow \underline{K}$ ein Diagramm $E \subset \mathrm{Mor}\underline{K}$ und gilt, daß D(i) E-injektiv (E-projektiv) ist für alle $i \in \mathrm{Obj}\underline{I}$, dann ist der Limes (Colimes) von D, falls er existiert, ebenfalls E-injektiv (E-projektiv).

1.7. Definition: Ein Minimum (Maximum) in V(K) bezüglich $<_E$, wobei E S-Klasse in einer Kategorie $\underline{K}$ sein soll, heißt feinstes (gröbstes) Element von V(K) und wird mit K^F (K^G) bezeichnet.
Nun folgen Axiome, die für Kategorien von "topologisch" strukturierten Mengen (Proximitätsräume, Uniforme Räume usw. s.Einleitung) sehr einfach nachzuprüfen sind.
$\underline{K}$ sei eine Kategorie mit S-Klasse E, es sollen dann bedeuten:
(G): Jede Klasse V(K) hat ein gröbstes Element K^G.
(F): Jede Klasse V(K) hat ein feinstes Element K^F.
(I): Das gröbste Element (falls es existiert) einer jeden Klasse ist E-injektiv.
(P): Das feinste Element (falls es existiert) einer jeden Klasse ist E-projektiv.

1.8. Lemma: $\underline{K}$ sei eine Kategorie mit S-Klasse E und es gelte (F), dann ist L, $M \in V(K)$ äquivalent zu $L^F = M^F$.

Beweis: „$\Rightarrow$" nach Definition von K^F ist $L^F = M^F = K^F$
„$\Leftarrow$" $L^F = M^F$ besagt, daß $L^F <_E L$ und $M^F <_E L$ gilt, damit sind aber L und M E-verbunden.

1.9. Bemerkung: In den Anwendungen haben wir Kleinheitsbedingungen (die auch für die Theorie der Epireflexionen benötigt werden) zur Verfügung. Aus diesen können wir folgern, daß V(K) eine Menge ist:

1.10. Lemma: Ist $\underline{K}$ eine colokal-kleine Kategorie mit S-Klasse E und gilt (F), so ist V(K) für jedes $K \in Obj\underline{K}$ eine Menge.

Beweis: Wegen (F) ist jedes Element $K' \in V(K)$ mit K^F durch einen Bimorphismus $e \in Mor(K^F, K')$ verbunden. Für die Epimorphismen gibt es eine repräsentative Menge; da aus $e' \in E$ für einen Isomorphismus e' folgt, daß er eine Identität ist, gilt die Behauptung.
Da wir später die Mengeneigenschaft von V(K) benutzen werden, formulieren wir:
(K): Für alle $K \in Obj\underline{K}$ ist V(K) eine Menge.

1.11. (a) Bemerkung: $Z : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}$ sei ein idempotenter Endofunktor, dann ist $Z(Obj\underline{K})$ zusammen mit $Z(Mor\underline{K})$ eine Unterkategorie $\underline{Z}$ von $\underline{K}$.

Beweis: $Z^2 = Z$ besagt, daß Z auf der Objekt - und

Morphismenklasse idempotent ist. Es bleibt nur zu zeigen, daß die Komposition zweier Morphismen aus Mor$\underline{Z}$ wieder in Mor$\underline{Z}$ liegt. Seien k, k' $\in$ Mor$\underline{Z}$ = Z(Mor$\underline{K}$), und k k' $\in$ Mor$\underline{K}$. Es gibt also Morphismen m, m' mit k = Zm und k' = Zm', d.h. k k' = Z(m) Z(m') = Z^2(m) Z^2(m') = Z(Z(m)Z(m')) also k k' $\in$ Z(Mor$\underline{K}$).

Die folgende Bemerkung gibt die Form an, in der wir adjungierte Situationen beschreiben:

1.11.(b) Bemerkung: Ein Funktor T : $\underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ besitzt genau dann einen Linksadjungierten S, wenn es natürliche Transformationen (1) $\underline{k}$: ST $\longrightarrow I_{\underline{K}}$ und (2) $\underline{l}$: $I_{\underline{L}} \longrightarrow$ TS gibt, welche die Verträglichkeitsbedingung (3) $(Tk_K)l_{TK} = 1_{TK}$ für K$\in$ Obj$\underline{K}$ und (4) $k_{SL}\, Sl_L = 1_{SL}$ für L$\in$ Obj$\underline{L}$ erfüllen.

Ist T treu, so besitzt er einen Linksadjungierten - Rechtsinversen genau dann, wenn (I.) eine natürliche Transformation $\underline{k}$: ST $\longrightarrow I_{\underline{K}}$ existiert und (II.) TS = $I_{\underline{L}}$ gilt und außerdem (III.) für alle K$\in$ Obj$\underline{K}$ $Tk_K = 1_{TK}$ erfüllt ist. Die in diesem Fall zu (4) äquivalente Bedingung $k_{SL} = 1_{SL}$ für L$\in$ Obj$\underline{L}$ ist wegen (III.) und der Treue von T automatisch erfüllt.

Ist T treu, so besitzt er einen rechtsadjungierten-rechtsinversen R genau dann, wenn (a) TR = $\underline{I}_{\underline{L}}$ gilt und es (b) eine natürliche Transformation $\underline{z}$: $I_{\underline{K}} \longrightarrow$ RT gibt, so daß (c) für alle K $\in$ Obj$\underline{K}$ $Tz_K = 1_K$ erfüllt ist. Wegen der Treue und (c) ist wieder (d) $z_{RL} = 1_{RL}$ automatisch erfüllt.

Ist $T : K \longrightarrow \underline{L}$ treu und besitzt er einen rechtsadjungierten-rechtsinversen R, so gilt für ein terminales Objekt $A \in \mathrm{Obj}\underline{K}$, daß TA terminal in $\underline{L}$ ist.

Wir beweisen die letzte Aussage:

Für A haben wir den Morphismus $z_A \in \mathrm{Mor}(A, RTA)$ nach (b) und da A terminal ist, besitzt dieser einen linksinversen $t \in \mathrm{Mor}(RTA, A)$ mit $tz_A = 1_A$. Wegen der Treue von T folgt aus $Tz_A = 1_{TA}$, also aus (c), daß z_A außerdem ein Epimorphismus ist; also ist z_A ein Isomorphismus und damit RTA ebenfalls ein terminales Objekt. Für jedes $L \in \mathrm{Obj}\underline{L}$ ist $\mathrm{Mor}(L, TA) \neq \emptyset$, denn Mor(RL, A) enthält einen Morphismus. Da R als Rechtsiverser injektiv auf der Morphismenklasse und RTA terminal ist, also Mor(RL, RTA) genau einen Morphismus enthält, ist auch Mor(L, TA) einelementig.

Nun ziehen wir einige Folgerungen aus den Axiomen:

1.12. Satz: $\underline{K}$ sei eine Kategorie mit S-Klasse E und es gelte (G) und (I), dann gilt:

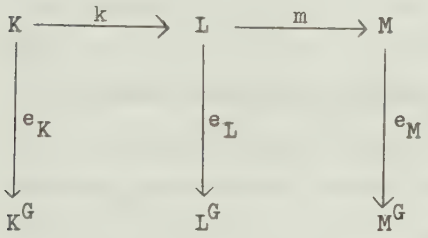
(a) Die Zuordnung $K \longmapsto K^G$ auf die Morphismen erweitert werden, so daß ein Funktor $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}$ definiert wird, der idempotent ist.

(b) G ist ein treuer Epifunktor

(c) Die durch G definierte Unterkategorie $\underline{G}$ ist volle und isomorphie-abgeschlossene, bireflektive Unterkategorie mit Elementen $e_K \in E$, $e_K : K \longrightarrow K^G$ als Reflexionsmorphismen.

Beweis: (a) Wir definieren G auf Morphismen:

Sei $k \in \mathrm{Mor}(K,L)$ gegeben, da L^G E-injektiv ist, gibt es ein k^G mit $k^G e_K = e_L k$.
k^G ist eindeutig bestimmt, da e_K ein Epimorphismus ist.
Zum Nachweis der Funktoreigenschaft von G definieren wir im Diagramm:



$k' := e_L k$, $m' = e_M m$ und $e_M mk = : (mk)'$. Wegen der E-Injektivität von L^G und M^G existieren k^G, m^G, $(mk)^G$ mit

$(mk)^G e_K = (mk)'$, $k^G e_K = k'$, $m^G e_L = m'$. Nun ist $(mk)^G e_K = (mk)' = e_M mk = m'k = m^G e_L k = m^G k' = m^G k^G e_K$ und da e_K ein Epimorphismus ist, folgt $(mk)^G = m^G k^G$.
Die Idempotenz von G liegt daran, daß K^G als Maximum von V(K) definiert ist, also $G(K^G) = K^{GG} = K^G$ gilt. $G(k^G) = k^G$ folgt, wenn im Diagramm K durch K^G, L durch L^G, e_K durch 1_{K^G}, e_L durch 1_{L^G} ersetzt werden, denn es ist ja $\mathrm{Mor}(K^G, K^G) \cap E = \{1_{K^G}\}$

(b) Sei $k,k' \in \mathrm{Mor}(K,L)$ mit $k^G = k'^G$, dann ist $k^G e_K = e_L k = e_L k'$ und da e_L ein Monomorphismus ist, ergibt sich $k = k'$, d.h. G ist treu. Ist $k \in \mathrm{Mor}(K,L)$ ein Epimorphismus, dann auch $e_L k$, und aus $k^G e_K = e_L k$ folgt, daß k^G ein Epimorphismus ist. G ist also Epifunktor.

(c) Die Unterkategorie $\underline{G}$, die von G erzeugt wird, ist wie in 1.11. zu definieren. $\underline{G}$ ist volle Unter-

kategorie, wie sich aus dem Beweis von (a) ergeben hat. Sie ist auch isomorphie-abgeschlossen. Sei $k \in \mathrm{Mor}(L, K^G)$ ein Isomorphismus, so muß $L = L^G$ gezeigt werden. Da K^G E-injektiv ist, folgt die Existenz von $k' \in \mathrm{Mor}(L^G, K^G)$ mit $k' e_L = k$ also $k^{-1} k' e_L = 1_L$. Damit ist e_L ein Epimorphismus und besitzt ein Linksinverses, also ist e_L ein Isomorphismus und nach 1.1. (3a), (3b) ergibt sich $e_L = 1_L$ d.h. $L = L^G$. Die $e_K \in \mathrm{Mor}(K, K^G)$ liefern eine natürliche Transformation $(e_K) = \underline{e} : I_{\underline{K}} \longrightarrow SG$, wobei $S : \underline{G} \longrightarrow \underline{K}$ der Einbettungsfunktor sein soll. Zusammen mit $GS = I_{\underline{G}}$ folgt, daß $\underline{G}$ eine bireflektive Unterkategorie ist.

Für den dualen Fall geben wir noch die Bezeichnungen an. $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}$ bezeichnet den treuen Endofunktor, der aus (F) und (P) entsteht, $\underline{F}$ die von F erzeugte volle, isomorphie-abgeschlossene, bicoreflektive Unterkategorie und $e^K \in \mathrm{Mor}(K^F, K)$ die Coreflexionsmorphismen. Für die Funktoren G und F benutzen wir zwei Schreibweisen nebeneinander: $K^F = FK$, $K^G = GK$ und entsprechend für Morphismen.

1.13. Korollar zu 1.12.: $\underline{K}$ sei eine Kategorie mit S-Klasse E und es gelte

(G) und (I)		dual: (F) und (P)
Dann gelten folgende Aussagen:		
G bewahrt Colimites.	(1)	F bewahrt Limites
Der Einbettungsfunktor $\underline{G} \longrightarrow \underline{K}$ bewahrt Limites.	(2)	Der Einbettungsfunktor $\underline{F} \longrightarrow \underline{K}$ bewahrt Colimites.

Ist $\underline{K}$ vollständig, dann auch $\underline{G}$.

$k \in \mathrm{Epi}\underline{K}$ genau dann, wenn $k^G \in \mathrm{Epi}\underline{G}$

$k \in E$ genau dann, wenn $k^G = 1_{K^G}$ für die Quelle K von k.

(3) Ist $\underline{K}$ covollständig, dann auch $\underline{F}$.

(4) $k \in \mathrm{Mono}\underline{K}$ genau dann, wenn $k^F \in \mathrm{Mono}\underline{F}$

(5) $k \in E$ genau dann, wenn $k^F = 1_{K^F}$ für das Ziel K von k.

Wir beweisen die Aussagen, die links stehen, die anderen sind dual dazu: (1), (2) und (3) folgen aus 1.12.(c), da G linksadjungiert zum Einbettungsfunktor $\underline{G} \hookrightarrow \underline{K}$ ist. (4) ist erfüllt, da G treu ist, also Epimorphismen reflektiert und nach (1) ist er ein Epifunktor. Um (5) zu zeigen, sei $k \in \mathrm{Mor}(K,K')$. Wenden wir G an, so erhalten wir nach 1.12.(c) das Diagramm (D_1)

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\ k\ } & K' \\ \downarrow{\scriptstyle e_K} & (D_1) & \downarrow{\scriptstyle e_{K'}} \\ K^G & \xrightarrow{\ k^G\ } & K'^G \end{array}$$

mit $e_{K'}, e_{K'} \in E$ und $e_{K'}\, k = k^G e_K$. Ist $k^G = 1_{K^G}$, so haben wir $e_{K'}\, k = k^G e_K \in E$ und damit nach 1.1.(2') $k \in E$.

Ist umgekehrt $k \in E$, dann sind K und K' E-verbunden, d.h. $K^G = K'^G$; $k \in E$ impliziert nun, daß auch $k^G \in E$ ist, wieder nach 1.1.(2). Aus 1.1.(3a) und (3b) folgt dann $k^G = 1_{K^G}$. Zusammengefaßt ergeben sich die folgenden Aussagen:

1.14. Satz: $\underline{K}$ sei eine Kategorie mit einer S-Klasse E, für die (G), (F), (I), (P) erfüllt ist, dann gilt:

(a) Die beiden Endofunktoren G und F (definiert nach 1.12.) erfüllen die Gleichungen $GG = G$, $GF = G$, $FG = F$, $FF = F$.

(b) Die von G und F erzeugten Unterkategorien $\underline{G}$ und $\underline{F}$ (s.1.11., 1.12.) sind isomorph.

(c) G und F bewahren Limites und Colimites

(d) Es gilt $e \in E$ genau dann, wenn $Ge = 1$ gilt und äquivalent dazu ist $Fe = 1$

(e) F ist linksadjungiert zu G und die natürlichen Transformationen $\underline{e}^{(\ )}: FG \longrightarrow 1_{\underline{K}}$, $\underline{e}_{(\ )}: 1_{\underline{K}} \longrightarrow GF$ stammen aus E.

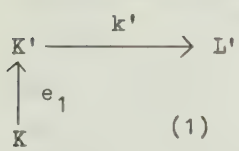
Beweis: (a) ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion von G und F (s.1.12.).

(b) Die Definitionen der Unterkategorien $\underline{G}$ und $\underline{F}$ (1.11.(a), 1.12.) ergeben zusammen mit (a) die Gleichungen $G|_{\underline{F}}\ F|_{\underline{G}} = 1_{\underline{G}}$, $F|_{\underline{G}}\ G|_{\underline{F}} = 1_{\underline{F}}$ und damit die Isomorphie von $\underline{G}$ und $\underline{F}$.

(c) folgt aus (b) zusammen mit 1.13.(2) und (d) ist gleichbedeutend mit der Aussage 1.13.(5). Wegen (a) liefern die nach 1.12. existierenden Morphismen $K^F \xrightarrow{e^K} K$ und $K \xrightarrow{e_K} K^G$ die gesuchten natürlichen Transformationen. Die Verträglichkeitsbedingungen 1.11.(b) sind mit 1.13.(5) erfüllt.

In Kategorien strukturierter Mengen lassen sich Strukturen auf einer Menge auf isomorphe Mengen durch Isomorphismen übertragen; wir fassen dies kategoriell:

1.15. Definition: $\underline{K}$ sei eine Kategorie, $E \subset \mathrm{Mor}\underline{K}$;
E heißt Isomorphie-Ziel-erhaltend, - kurz: erfüllt (Iso)-,
wenn für jedes Diagramm mit $e_1 \in E$, und k' Isomorphismus,

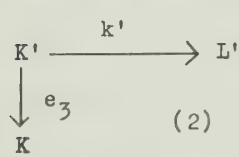


(1)

ein L, ein $e_2 \in \mathrm{Mor}(L,L') \cap E$ Isomorphismus $k \in \mathrm{Mor}(K,L)$ so existieren, daß gilt: $e_2 k = k' e_1$.

Der andere Fall, in dem das Ziel des gegebenen E-Morphismus ein Isomorphismus ist, läßt sich wegen der Existenz des inversen Morphismus auf die Form des angegebenen Diagramms bringen. Der duale Fall liegt dann vor, wenn ein Diagramm gegeben ist, in dem ein Element aus E einen Isomorphismus als Quelle hat:

Definition: K sei eine Kategorie, $E \subset \mathrm{Mor}\underline{K}$; E heißt Isomorphie-Quellen erhaltend, - kurz: erfüllt $(\mathrm{Iso})^d$-, wenn für jedes Diagramm mit $e_3 \in E \cap \mathrm{Mor}(K',K)$, k' ein Isomorphismus, ein L, ein $e_4 \in \mathrm{Mor}(L',L) \cap E$ und ein Isomorphismus $k \in \mathrm{Mor}(K,L)$ so existieren, daß gilt: $k e_3 = e_4 k'$.

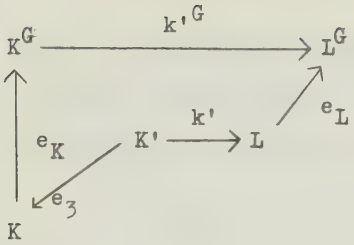


(2)

Wie das folgende Lemma zeigt, ist nur eines der beiden Axiome erforderlich:

1.16. Lemma: $\underline{K}$ sei eine Kategorie mit S-Klasse E und es gelte (G) und (I), dann folgt aus (Iso) die Eigenschaft $(\mathrm{Iso})^d$.

Beweis: Das Diagramm (2) läßt sich durch Anwendung des Funktors G auf ein Diagramm der Form (2) bringen:



Dabei ist k'^G ein Isomorphismus und nach (Iso) ist das Diagramm in der gewünschten Form ergänzbar.

1.17. Definition: Eine S-Klasse E in einer Kategorie K nennen wir Einheitenklasse, wenn (Iso) erfüllt ist.
Eine Kategorie K mit einer Einheitenklasse E, für die (G), (I), (F), (P) und (K) gilt, heißt E-Kategorie.
Die Abkürzung E-Kategorie ist von der Einheitenklasse E hergeleitet, die gerade diejenigen $e \in \mathrm{Mor}(K,K')$ Morphismen enthält, für die $e^G = 1_K G$ und äquivalent $e^F = 1_K F$ gelten.

2. Von Funktoren erzeugte Morphismenklassen

Nun werden wir die Frage untersuchen, unter welchen Bedingungen wir eine E-Kategorie durch einen Funktor erhalten können.

2.1. Definition: $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ sei ein Funktor, ein $\underline{K}$-Morphismus $e \in Mor(K,L)$ heißt T-Einheit (ČECH [2]), wenn $TK = TL$ und $Te = 1_{TK}$ gilt. Die Klasse aller T-Einheiten wird mit E_T bezeichnet.

2.2. Lemma: $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ sei ein Funktor, E_T die Klasse der T-Einheiten, dann gelten für E_T die Eigenschaften (2) und (2') von 1.1.; ist T ein treuer Funktor, dann gelten weiter (1) und (3b).

Beweis: Sei in $\underline{K}$ $e_1 \in Mor(K,L)$, $e_2 \in Mor(L,M)$. Aus $e_1, e_2 \in E_T$ und $e_2, e_1 \in Mor\underline{K}$ folgt $T(e_2 e_1) = Te_2\ Te_1 = 1_{TK}$, denn $e_1, e_2 \in E_T$ ergibt ja $TK = TM = TL$, d.h. (2) ist erfüllt. (2') ergibt sich so: $e_2\ e_1 \in E_T$ impliziert $TK = TM$ und $T(e_2\ e_1) = 1_{TK}$. Aus $e_2 \in E_T$ folgt $TL = TM$ und $Te_2 = 1_{TL}$, woraus $Te_1 = T_K$ folgt. Ist T treu, dann reflektiert T Epi- und Monomorphismen, also auch Bimorphismen, d.h. (1) ist erfüllt. Wegen der Treue von T und da die Bilder von E_T die Identitäten in $\underline{L}$ sind, kann Mor (K,L) für beliebiges $K, L \in Obj\underline{K}$ höchstens ein Element von E_T enthalten (3b).

2.3. Definition: $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ heißt strukturierender Funktor, wenn E_T strukturierend ist.

Hinreichend dafür, daß E_T strukturierend ist, ist zusätzlich zur Treue die folgende Eigenschaft:

Aus $e_1 \in \mathrm{Mor}(K,L)$, $e_2 \in \mathrm{Mor}(L,K)$ mit $Te_1 = 1_{TK}$, $TK = TL$, $Te_2 = 1_{TL}$ folgt $K = L$; diese Eigenschaft ist äquivalent zu (3a).

Beispiel: Die Funktoren G und F sind strukturierend (s.1.13.), insbesondere in einer E-Kategorie. Weiter: $(\underline{C},T)$ sei eine Top-Kategorie (wir übernehmen die Bezeichnungen von WYLER[10]), dann ist $\underline{C}$ zusammen mit E_T eine E-Kategorie.

Beweis: Ist $(\underline{C},T)$ Top-Kategorie über $\underline{A}$ und von der topologischen Theorie $p^* : \underline{A}^d \longrightarrow \mathrm{ORD}$ induziert, dann gibt es einen Isomorphismus $V : \underline{C} \longrightarrow \underline{A}^P$, mit $T = PV$, wobei $P : \underline{A}^P \longrightarrow \underline{A}$ der Projektionsfunktor ist. Wir führen unsere Betrachtungen für $\underline{A}^P$ durch und betrachten nun die Klasse E_P in $\underline{A}^P$.

Da P treu ist, gilt nach 2.2. für E_P (1), (2), (2'), (3b) von 1.1. (3a) ist auch erfüllt, denn ist $k = (x,f,y) \in \mathrm{Mor}((A,x),(B,y)) \cap E_P$ und k ein Isomorphismus, dann gilt $A = B$, weil $k \in E_P$ ist und $x \leq y$ in p^*A, nach Definition der Morphismen in A^P. Zu k existiert ein inverser Morphismus, woraus auch $y \leq x$ folgt, also $(A,x) = (B,y)$ in A^P. E_P erfüllt auch (Iso), denn ist $k = (y,f,x) \in \mathrm{Mor}((B,y),(A,x))$ ein Isomorphismus und $e = (x',1_A,x) \in \mathrm{Mor}((A,x'),(A,x))$, so ist auch $k' = (f^P x,f,x')$ ein Isomorphismus und mit $e' = (f^P x,1_B,y)$ gilt $ke' = ek'$. Die Kleinheitsbedingung (K) ist in E_P erfüllt, da $P^{-1}(A)$ bezüglich $\leq_{E_P}$ isomorph zu p^*A ist. Die Axiome (F) und (P) ergeben sich direkt aus der Definition der Morphismen in A^P. Zum Nachweis von (G) und (P) wird gebraucht, daß p^*f für einen Morphismus f Infima bewahrt.

2.4. Lemma: $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ sei strukturierend und $T^{-1}(T(K))$ habe für jedes $K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ bezüglich der durch E_T erzeugten Ordnung ein Maximum K^G, dann gilt: Zwei Objekte $K, L \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ sind E_T-verbunden genau dann, wenn $TK = TL$ gilt.

Beweis: Aus $K\ E_T\ L$ folgt die Existenz von $\underline{K}$-Objekten $(K_i)_{i=1}^n$ mit $K_1 = K$, $K_n = L$ und $(\mathrm{Mor}(K_i, K_{i+1}) \cup \mathrm{Mor}(K_{i+1}, K_i)) \cap E_T \neq \emptyset$, durch Induktion erhält man $TK_i = TK$ für $i = 1, \ldots n$, woraus $TK = TL$ folgt. Ist umgekehrt $TK = TL$, dann gibt es nach Definition des Maximums $e_1, e_2 \in E_T$ mit $e_1 \in \mathrm{Mor}(K, K^G)$ und $e_2 \in \mathrm{Mor}(L, L^G)$, wobei $K^G = L^G$ ist, d.h. K und L sind E_T-verbunden.

2.5. Bemerkung: Wenn bezüglich eines strukturierenden Funktors ein Maximum von $T^{-1}(T(K))$ für alle $K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ existiert, dann ist nach dem Lemma 2.4. $V(K) = T^{-1}(T(K))$. Um die Herkunft dieser Klasse zu kennzeichnen, werden wir das Symbol $V_T(K)$ benutzen.

2.6. Lemma: $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ sei ein strukturierender Funktor und für alle $K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ existiere E_T-injektive K^G, d.h. für E_T gelte (G) und (I), dann ist das Bild von $\underline{K}$ unter T mit den Objekten $T(\mathrm{Obj}\underline{K})$ und den Morphismen $T(\mathrm{Mor}\underline{K})$ eine Unterkategorie $\underline{L}_T$ von L.

Beweis: Es muß nur noch gezeigt werden, daß das Kompositum zweier Morphismen aus $T(\mathrm{Mor}\underline{K})$ wieder darin liegt. Sei also $k_1, k_2 \in T(\mathrm{Mor}\underline{K})$ und $k_2 \cdot k_1 \in \mathrm{Mor}\underline{L}$, dann gibt es Objekte $K_i \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ $i=1,2,3,4$ und Morphismen $k_1' \in \mathrm{Mor}(K_1, K_2)$,

$k_2' \in \mathrm{Mor}(K_3,K_4)$ mit $Tk_i' = k_i$ $(i=1,2)$ und $TK_2' = TK_3'$; damit können wir $k_2'^G\ k_1'^G$ bilden und es ist $T(k_2'^G\ k_1'^G) = k_2\ k_1$.

2.7. Satz: Ist umgekehrt das Bild eines strukturierenden Funktors $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ eine Unterkategorie $\underline{L}_T$ von $\underline{L}$, so sind äquivalent:

(a) Zu jedem $\underline{K} \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ gibt es E_T-projektives Minimum (im Sinne von 2.4.^{d}) K^F.

(b) $T' : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}_T$ (also der auf das Bild eingeschränkte Funktor) besitzt einen Linksadjungierten - rechtsinversen S.

Beweis: Nach 1.11.(b) ist S genau dann linksadjungiert - rechtsinvers zu T', wenn 1. eine natürliche Transformation $\underline{e}: ST' \longrightarrow I_{\underline{K}}$ existiert, 2. $T'S = 1_{\underline{L}_T}$ und 3. $T'e_K = 1_{T'K}$ für alle $K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ gilt.

(a) impliziert (b): S wird auf Objekten so konstruiert, daß einem $L \in \mathrm{Obj}\underline{L}_T$ das nach Voraussetzung existierende Maximum SL von $T'^{-1}(L)$ bezüglich $<_{E_T}$ zugeordnet wird, das bedeutet $SL = K^F$ für ein beliebiges Objekt $K \in T'^{-1}(L)$. Es ist damit die 2.Bedingung der Vorbemerkung für Objekte erfüllt. Zu einem $l \in \mathrm{Mor}(L,L')$ in $\underline{L}$ gibt es nach Voraussetzung einen Morphismus $k \in \mathrm{Mor}(K,K')$ in $\underline{K}$ mit $T'k = l$, $T'K = L$, $T'K' = L'$; wegen 2.5. können wir den zu 1.12. dualen Satz anwenden und definieren $Sl := k^F \in \mathrm{Mor}(K^F,K'^F)$ wobei ja $K^F = SL$ und $K'^F = SL'$ gilt. Nach 1.12.^{d} erhalten wir eine natürliche Transformation $\underline{e} : ST' \longrightarrow I_{\underline{K}}$, wobei die Transformations-

morphismen $e_K \in Mor(ST'K,K)$ Elemente aus E_T sind, damit sind die Bedingungen 1. und 3. erfüllt. Die Bedingung 2. für Morphismen ist aus einem entsprechenden Diagramm zu ersehen. Die Definition Sl: $= k^F$ ist unabhängig von der Auswahl von k, denn sei k' mit $T'k' = 1$, $k' \in Mor(M,M')$, dann ist $T'M = L$, $T'M' = L'$ und damit gilt $M^F = K^F$, $M'^F = K'^F$ und $T'(k'^F) = T'(k^F) = 1$.

(b) impliziert (a):

Sei $K \in Obj\underline{K}$; wir müssen zeigen, daß ST'K Minimum in $T'^{-1}(T(K))$ bezüglich $<_{E_T}$ ist. Es gilt $K <_{E_T} ST'K$, denn wir haben die natürliche Transformation $\underline{e}$ zur Verfügung, also einen Morphismus $e_K \in Mor(K,ST'K)$ mit $e_K \in E_T$. Sei nun $K' \in T'^{-1}(T(K))$, dann ist wegen $T'(K') = T(K)$ auch $ST'K' = ST'(K)$ also auch $K' <_{E_T} ST'K$. ST'K ist auch E_T-projektiv; sei $M,M' \in Obj\underline{K}$, $m \in Mor(ST'K,M)$ und $e \in Mor(M',M) \cap E_T$ gegeben. Wir müssen einen Morphismus $m' \in Mor(ST'K,M')$ mit $em' = m$ angeben, das leistet aber $m' := e_{M'} ST'(m)$, wobei $e_{M'}$ der Transformationsmorphismus ist.

Die Anwendung des letzten Satzes liefert nun die folgende Charakterisierung, die Teile von 1.14. umkehrt:

2.8. Satz: $\underline{K}$ sei eine Kategorie mit S-Klasse E und $(F',G,\underline{k},\underline{m})$ eine Adjunktion von Endofunktoren, wobei $GG = G$, $GF' = G$, $E_G = E$ und $k_K \in E$ für alle $K \in Obj\underline{K}$ gelten soll, dann hat E die Eigenschaften (G), (I), (F) und (P).

Beweis: Die natürlichen Transformationen $\underline{k} : I_{\underline{K}} \longrightarrow GF'$ und $\underline{m} : F'G \longrightarrow I_{\underline{K}}$ erfüllen die Verträglichkeitsbedingungen

(a) $m_{F'K}F'k_K = 1_{F'K}$ und (b) $Gm_Kk_{GK} = 1_{GK}$ für alle $K \in Obj\underline{K}$. (b) liefert die Gleichung (c) $k_{GK} = 1_{GK}$, denn es ist $k_{GK} \in E$ nach Voraussetzung und $k_{GK} \in Mor(GK,GF'GK) = Mor(GK,GK)$ wegen $GF' = G$ und in E gilt 1.1.(3a). (c) liefert zusammen mit (b) die Gültigkeit von (d) $m_K \in E$ für $K \in Obj\underline{K}$, da $E = E_G$ vorausgesetzt ist. Der Funktor $F := F'G$ ist ebenfalls linksadjungiert zu G : Wegen $GF = GF'G = G = GF'$ und $FG = F'GG = F'G$ sind die Morphismenklassen $\underline{k}$ und $\underline{m}$ ebenfalls natürliche Transformationen $\underline{k} : I_{\underline{K}} \longrightarrow GF$ und $\underline{m} : FG \longrightarrow I_{\underline{K}}$, für welche die Verträglichkeitsbedingung (b) erhalten bleibt und (a') $m_{FK}Fk_K = 1_{FK}$ für $K \in Obj\underline{K}$ nachgewiesen werden muß. Nach der Definition von F ist $m_{FK}Fk_K = m_{F'GK}F'Gk_K$ und (a) liefert für das Objekt GK $m_{F'GK}F'k_{GK} = 1_{F'GK}$, woraus mit (d) $m_{F'GK}F'1_{GK} = m_{F'GK} = 1_{F'GK}$ folgt und mit $k_K \in E = E_G$ ist $m_{FK}Fk_K = 1_{F'GK} = 1_{FK}$, also (a') erfüllt. Nach 1.11. können wir wegen $GG = G$ die Unterkategorie $\underline{G}$ bilden, die wegen $k_{GK} = 1_{GK}$ voll ist. Der Funktor G auf das Bild eingeschränkt $G' : \underline{K} \longrightarrow \underline{G}$ besitzt den linksadjungierten-rechtsinversen $F|_{\underline{G}}$, was sich aus den Definitionen und nachgewiesenen Eigenschaften von $\underline{G}$, F und $\underline{m}$ ergibt. So können wir 2.7. anwenden und erhalten zu jedem $K \in Obj\underline{K}$ ein E-projektives Maximum K^F, d.h. es gilt für E (F) und (P) und nach 2.4. ist dies gerade das Maximum von V(K) bezüglich $<_E$. Der Beweis von 2.7. ergibt, daß K^F gerade FK ist und daß F derselbe Funktor ist, der nach 1.12.^{d} von (F) und (P) induziert wird. Mit $F := F'G$ erhalten wir direkt $FF = F'GF'G = FGG = F'G = F$ und $FG = F'GG = F'G = F$

und nach 1.12.(5) ist $E = E_F$. Wir haben jetzt die dualen Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt und damit gilt für E auch (G) und (I), wobei der Funktor G mit dem durch (G) und (I) induzierten Funktor übereinstimmt.

3. Initialität bezüglich eines Diagramms.

3.1. Vereinbarungen: $\underline{I}$ sei eine kleine Kategorie.
$D : \underline{I} \longrightarrow \underline{K}$ ein Diagramm über einer Kategorie $\underline{K}$;
$d : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}^{\underline{I}}$ soll den Diagonalfunktor benennen, wobei $\underline{K}^{\underline{I}}$ die Funktorkategorie der Funktoren von $\underline{I}$ und $\underline{K}$ sein soll. Mit (d,D) soll die Kommakategorie der Objekte d- über D bezeichnet werden (s.MAC LANE, [7] S.48ff.), deren Objekte natürliche Transformationen $\underline{k} : dK \longrightarrow D$ sind, wobei $\underline{k} = (k_i)_{i \in Obj\underline{I}}$ mit $k_i \in Mor(K,D(i))$ gilt, und deren Morphismen $a \in Mor(K,K')$ diejenigen $\underline{K}$-Morphismen sind, für die $d(a)$ die Gleichung $\underline{k}'d(a) = \underline{k}$ erfüllt, für eine natürliche Transformation $\underline{k}' : d(K) \longrightarrow D$, d.h. mit $\underline{k}' = (k_i')$ gilt $k_i'a = k_i$ für $i \in Obj\underline{I}$. Ist E eine Klasse von $\underline{K}$-Morphismen, die kompositionsabgeschlossen ist, und die alle Identitäten enthält, so bezeichnen wir mit $(d,D)_E$ die Kommakategorie der Objekte d- über D, die als Objekte dieselbe Klasse wie (d,D) besitzt, deren Morphismenklasse aber auf E eingeschränkt ist, d.h. es gilt $Mor(d,D)_E = (Mor(d,D)) \cap E$. Entsprechende Bezeichnungen werden wir für die duale Konstruktion (D,d) der Kommakategorie der Objekte d- unter D benutzen. Ist $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Funktor, $d' : \underline{L} \longrightarrow \underline{L}^{\underline{I}}$ der Diagonalfunktor für $\underline{L}$ bezüglich $\underline{I}$, so wird durch T ein Funktor $T' : (d,D) \longrightarrow (d',TD)$ induziert, der auf Objekten $\underline{k} = (k_i)$ durch $T'\underline{k} = (Tk_i)$ und auf Morphismen a durch $T'a := Ta$ definiert ist. Wird T' mit dem Inklusionsfunktor $(d,D)_E \longrightarrow (d,D)$ verknüpft, so bezeichnen wir das Kompositum mit $\overline{T}$.

Im folgenden Abschnitt werden wir die nachstehenden Symbole immer in derselben Bedeutung verwenden, ohne dies besonders anzugeben:
$\underline{I}$ sei eine kleine Kategorie, $D : \underline{I} \longrightarrow \underline{K}$ ein Diagramm über $\underline{K}$, $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Funktor, $L', L \in \mathrm{Obj}\underline{L}$, $K', K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ und $\underline{k}' = (k_i')$, $\underline{k} = (k_i)$, $l = (l_i)$, $\underline{l}' = (l_i')$ Familien von Morphismen mit $k_i \in \mathrm{Mor}(K, D(i))$, $k_i' \in \mathrm{Mor}(K', D(i))$ $l_i \in \mathrm{Mor}(L, TD(i))$, $l_i' \in \mathrm{Mor}(L', TD(i))$ für alle $i \in \mathrm{Obj}\underline{I}$. Ist eine der Familien untere Schranke des entsprechenden Diagramms, so wird das z.B. durch $\underline{k} \in \mathrm{Obj}(d, D)$ angegeben.

3.2. Lemma: $(K, \underline{k})$ ist Limes von D genau dann, wenn $\underline{k}$ terminales Objekt in (d, D) ist.
Beweis: $(K', \underline{k}')$ ist genau dann untere Schranke von D, wenn $\underline{k}'$ Objekt von (d, D) ist, und es gibt genau dann genau ein $a \in \mathrm{Mor}(K', K)$ mit $k_i a = k_i'$ für alle $i \in \mathrm{Obj}\underline{I}$, wenn es genau einen Morphismus a von $\underline{k}'$ nach $\underline{k}$ in (d, D) gibt.

3.3. Definition: Sei $g \in \mathrm{Mor}(TK', TK)$; $(K', \underline{k}')$ heißt g-zulässig bezüglich T und $(K, \underline{k})$, wenn $(Tk_i)g = Tk_i'$ für alle $i \in \mathrm{Obj}\underline{I}$ gilt.
$(K', \underline{k}')$ braucht dabei nicht notwendig untere Schranke von D zu sein, selbst wenn $(K, \underline{k})$ diese Eigenschaft hat. Es gilt aber:

3.4. Lemma: Sei T treu, $(K, \underline{k})$ untere Schranke von D und $(K', \underline{k}')$g-zulässig bezüglich T und $(K, \underline{k})$, dann ist auch

$(K',\underline{k}')$ untere Schranke von D.

Beweis: Ist $m \in Mor(i,j)$ mit $i,j \in Obj\underline{I}$, dann gilt $(Dm)k_i = k_j$, woraus sich $(TD(m))Tk_i = Tk_j$ ergibt. Nun ist $(K',\underline{k}')$ g-zulässig, deshalb gilt $(TDm)Tk_ig = (TDm)Tk_i' = (Tk_j)g = Tk_j'$ und, da T treu ist, folgt $(Dm)k_i' = k_j'$.

Initialität kann im allgemeinen in einer Kategorie bezüglich eines Funktors definiert werden. Wir unterscheiden zwischen schwacher und starker Initialität (Finalität). In der Topologie z.B. kann man die gröbste Topologie $\underline{X}$ auf einer Menge X bilden, so daß eine Familie von Abbildungen $f_i : X \longrightarrow Y_i$ für $i \in I$ in topologische Räume $(Y_i,\underline{Y}_i)$ stetig wird (schwach initial); darüber hinaus hat $\underline{X}$ die Eigenschaft, daß eine Abbildung $g : Z \longrightarrow X$ von einem topologischen Raum $(Z,\underline{Z})$ genau dann stetig ist, wenn f_ig für alle $i \in I$ stetig ist (stark initial). Entsprechendes gilt für die Finalität.

3.5. Definition: Das Quellobjekt K einer unteren Schranke $(K,\underline{k})$ des Diagramms D heißt stark initial bezüglich $T,\underline{k},D$, wenn für jede andere untere Schranke $(K',\underline{k}')$ gilt: $T'(Mor_{(d,D)}(\underline{k}',\underline{k})) = Mor_{(d',TD)}(T\underline{k}', T\underline{k})$; K heißt schwach initial bezüglich $T,\underline{k},D$, wenn für jede untere Schranke $(K',\underline{k}')$ von D mit $TK' = TK$ gilt: $T'(Mor(\underline{k}',\underline{k})) = 1_{TK}$

Wir haben also Initialität bezüglich eines beliebigen Diagramms definiert. Dies deckt den üblichen Begriff, der von einer Familie von Morphismen $k_i \in Mor(K,D(i))$ für $i \in I$, wobei I eine Menge ist, ausgeht, denn eine solche Familie

können wir als untere Schranke desjenigen Funktors von I, als diskreter Kategorie, nach $\underline{K}$ auffassen, der als Bildobjekte gerade D(i) besitzt. Die Definition 3.5. ist leichter zu handhaben und, wie gleich gezeigt wird, für unsere Zwecke äquivalent, da wir den Funktor T als treu annehmen können. Um die Äquivalenz zu präzisieren, führen wir zu dem Diagramm $D : \underline{I} \longrightarrow \underline{K}$ das Diagramm $D' : I' \longrightarrow I \longrightarrow \underline{K}$ ein, wobei $\underline{I}'$ aus $\underline{I}$ durch Fortlassen aller Morphismen, bis auf die Identitäten, gebildet wird, also die zu I gehörende diskrete Kategorie bedeutet. D' ist dann das Kompositum des Inklusionsfunktors, der $\underline{I}'$ in $\underline{I}$ einbettet, mit D. Mit dieser Bezeichnung gilt:

3.6. Lemma: T sei treu, $(K,\underline{k})$ untere Schranke von D; K ist genau dann stark initial bezüglich $T,\underline{k}$ und D, wenn K stark initial bezüglich $T,\underline{k}$ und D' ist.

Beweis: Sei $(K',\underline{k}')$ untere Schranke von D'; wir müssen $T'(\mathrm{Mor}(\underline{k}',\underline{k})) = \mathrm{Mor}(T\underline{k}',T\underline{k})$ in (d',TD') zeigen. Sei $g \in \mathrm{Mor}(T\underline{k}',Tk)$, dann ist $(K',\underline{k}')$ g-zulässig bezüglich T und (K,k) und nach 3.4. ebenfalls untere Schranke von D. Das bedeutet aber $\mathrm{Mor}_{(d,D')}(\underline{k}',\underline{k}) = \mathrm{Mor}_{(d,D)}(\underline{k}',\underline{k})$. Unter der Voraussetzung, daß K stark initial bezüglich $T,\underline{k},D$ ist, folgt damit, daß K auch stark initial bezüglich $T,\underline{k},D'$ ist. Die Umkehrung ist klar, da jede untere Schranke von D auch eine von D' ist.

3.7. Bemerkung: Ist T treu oder $\underline{I}$ diskret, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1) K ist stark initial bezüglich T, $\underline{k}$ und D

2) Für jedes $g \in \mathrm{Mor}\underline{L}$ und jedes bezüglich T und $(K,\underline{k})$, wobei $(K,\underline{k})$ untere Schranke von D ist, g-zulässige $(K',\underline{k}')$ existiert ein $\overline{g}$ mit $k_i\overline{g} = k_i'$ und $T\overline{g} = g$

2) ist noch einmal die explizite Formulierung von 1), was sich aus dem Vorangegangenen ergibt.

Im Fall von diskretem $\underline{I}$ ist D schon durch die Angabe von $\underline{k}$ bestimmt, so daß wir dann kurz sagen können: K ist stark initial bezüglich $\underline{k}$ und T.

3.8. Definition: Die Kategorie $\underline{K}$ heißt schwach (stark) initialisierbar bezüglich T, wenn es zu jedem Diagramm D und zu jeder unteren Schranke $(L,\underline{l})$ von TD eine untere Schranke $(K,\underline{k})$ von D gibt, mit $TK = L$, $T'\underline{k} = \underline{l}$, so daß K schwach (stark) initial bezüglich $\underline{k}$, T und D ist. $(K,\underline{k})$ heißt dann die Initialisierung von $(L,\underline{l})$.

3.9. Lemma: Ist K stark initial bezüglich $\underline{k}$, D und T, so ist K schwach initial bezüglich $\underline{k}$, D und T.

Beweis: Ist $(K',\underline{k}')$ mit $TK' = TK$ und $T'\underline{k} = T'\underline{k}'$ gegeben, dann gilt wegen der Funktoreigenschaft $T'(\mathrm{Mor}(\underline{k}',\underline{k})) \subset \{1_{TK}\}$, wegen der starken Initialität ist aber auch $T'(\mathrm{Mor}(\underline{k}',\underline{k})) \neq \emptyset$.

Zum folgenden Satz vergleiche man MAC LANE [7] S.141. Dort wird eine Aussage über die Existenz von Differenzkernen gemacht.

3.10. Satz: T sei treu, dann gilt: $\underline{K}$ ist genau dann stark initialisierbar, wenn für jedes D der Funktor $T' : (d,D) \longrightarrow (d',TD')$ einen rechtsadjungierten-rechtsinversen R besitzt:

Beweis: Zu einem Diagramm D besitzt der Funktor T' nach 1.11.(b) genau dann einen rechtsadjungierten- rechtsinversen wenn gilt (a) $T'R = \underline{I}_{(d',TD)}$,

(b) es gibt eine natürliche Transformation

$$\underline{z} = (z_{\underline{k}}) : \underline{I}_{(d,D)} \longrightarrow RT',$$

(c) $T'(z_{\underline{k}}) = 1_{\underline{k}}$ für $\underline{k} \in Obj(d,D)$.

Sei nun $\underline{K}$ stark initialisierbar und D ein Diagramm und $(L,\underline{l})$, $(L',\underline{l}')$ untere Schranken von TD, also $\underline{l},\underline{l}' \in Obj(d',TD)$ und $a \in Mor_{(d',TD)}(\underline{l}',\underline{l})$. Nach 3.7. und 3.5. existieren $(K,\underline{k})$, $(K,\underline{k}')$ mit $T'\underline{k} = \underline{l}$ und $T'\underline{k}' = \underline{l}'$, $TK = L$, $TK' = L'$ und K,K' sind stark initial bezüglich T,D und $\underline{k}$ bzw. $\underline{k}'$. Zu a gibt es wegen der Initialität von K ein $\overline{a} \in Mor_{(d,D)}(\underline{k}',\underline{k})$ mit $T'\overline{a} = a$. Wir definieren nun R durch die Zuordnung $R\underline{l} = \underline{k}$ auf Objekten und durch $Ra = \overline{a}$ auf Morphismen. Wegen der Treue von T sind diese Zuordnungen Abbildungen und R ist ein Funktor, der nach Konstruktion rechtsinvers zu T' ist. Um (b) zu erfüllen, setzt man in der eben durchgeführten Konstruktion, von K als dem Quellobjekt von $\underline{k}$ ausgehend, $RL = K'$ und $a = 1_{TK}$, was wegen $T'RL = L$ möglich ist. Analog wird (c) gezeigt.

Ist umgekehrt für jedes Diagramm D zu dem Funktor T' ein rechtsadjungierter-rechtsinverser vorhanden, so bildet man

zu einer unteren Schranke $(L,\underline{l})$ von TD das Objekt $R\underline{l} \in Obj(d,D)$ und das bedeutet, daß eine untere Schranke $(K,\underline{k})$ von D existiert, nämlich $R\underline{l} = :\underline{k}$ und K ist als Quelle von $\underline{k}$ bestimmt. (a) impliziert $TK = L$ und $T\underline{k} = \underline{l}$. K ist nun stark initial bezüglich T, D und $\underline{k}$, denn ist $(K,\underline{k}')$ eine weitere untere Schranke von D, die a-zulässig ist bezüglich T und $(K,\underline{k})$, dann erfüllt $(Ra)e_K$, die Bedingung 2) von 3.7. Einen anderen Beweis des folgenden Korollars findet man bei OSIUS [8] .

3.11. Korollar: Ist $\underline{K}$ stark initialisierbar bezüglich des treuen Funktors $T : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$, dann gilt:

(1) T bewahrt Limites.

(2) Ist $\underline{L}$ vollständig, dann ist auch $\underline{K}$ vollständig.

Beweis: Ist D ein Diagramm, so besitzt der zu T und D gehörende Funktor T' in dieser Situation nach 1.11.(b) terminale Objekte und T bewahrt deshalb nach 3.2. Limites, damit ist (1) bewiesen.
Besitzt TD einen Limes $(L,\underline{l})$ in $\underline{L}$, dann ist $\underline{l}$ terminales Objekt in (d',TD) und R bewahrt dies als rechtsadjungierter. $\underline{k} := R\underline{l}$ ist dann zusammen mit dem durch die Quelle K von $\underline{k}$ bestimmten Objekt Limes von D, womit (2) gezeigt ist.

3.12. Bemerkung: Unter den Voraussetzungen des Korollars, zuzüglich der Vollständigkeit von $\underline{L}$ ergibt sich aus dem Beweis von (2) ein konstruktives Verfahren zur Gewinnung von Limites in $\underline{K}$. Ausgehend von einem Diagramm $D : \underline{I} \longrightarrow \underline{K}$

bildet man den Limes $(L,\underline{l})$ von TD und findet in der Initialisierung $(K,\underline{k})$ von $(L,\underline{l})$ den Limes von D. Aus der Eindeutigkeit des Limes in $\underline{K}$ folgt daher auch, daß bei einem Limes $(K,\underline{k})$ das Objekt K stark initial ist bezüglich $\underline{k}$ und T, denn nach (1) ist $(TK,T\underline{k})$ Limes von TD und dessen Initialisierung ist dann Limes von D, also zu $(K,\underline{k})$ isomorph.

4. Spezielle Eigenschaften von E-Kategorien

4.1. Vorbemerkung: In einer E-Kategorie $\underline{K}$ haben wir die nach 1.13.(1) strukturierenden Funktoren G und F zur Verfügung; dies gestattet es uns Initialität (Finalität) bezüglich dieser Funktoren, intern, in $\underline{K}$ zu untersuchen. Die Klasse E bestimmt die Funktoren G und F, es gilt aber auch die Umkehrung. Bilden wir die Klassen E_G und E_F im Sinne von 2.2., dann gilt nach 1.13.(5) $E_G = E_F = E$.
Ist $D : \underline{I} \longrightarrow \underline{K}$ ein Diagramm und $(K,\underline{k})$ eine untere Schranke von D, dann ist nach 3.6. K genau dann stark initial bezüglich $D, \underline{k}$ und G, wenn K stark initial bezüglich $D', \underline{k}$ und G ist, denn G ist ein treuer Funktor. Wegen dieser Äquivalenz können wir uns darauf beschränken, Diagramme mit diskreten $\underline{I}$ zu untersuchen, also Familien $(D_i)_{i \in I}$ von Objekten aus $\underline{K}$. Sätze, die wir beweisen, gelten dann auch für beliebige Diagramme. Wegen der Isomorphie von $\underline{G}$ und $\underline{F}$ ist ein Objekt genau dann stark initial bezüglich G, wenn es stark initial bezüglich F ist. Liegt eine Familie $(D_i)_{i \in I}$ von Objekten aus $\underline{K}$ vor und ist $\underline{k} = (k_i)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen $k_i \in \mathrm{Mor}(K,D_i)$, so sagen wir: K ist <u>stark E-initial</u> bezüglich $\underline{k}$, wenn K stark initial bezüglich $(D_i)_{i \in I}$, $\underline{k}$ und G oder F ist. Durch die Angabe von $\underline{k}$ ist in einer E-Kategorie die vorliegende Situation eindeutig beschrieben. Entsprechend ist <u>schwach E-initial</u>, <u>stark(schwach) E-final</u>, <u>E-Initialisierbarkeit (Finalisierbarkeit)</u> und <u>E-Initialisierung (Fina-</u>

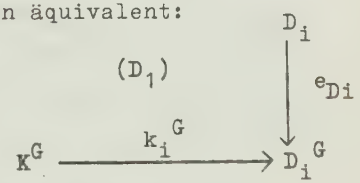
lisierung) definiert.

Das folgende Lemma hat vorbereitenden Charakter:

4.2. Lemma: K sei eine Kategorie mit S-Klasse E und es gelte (G) und (I). I sei eine Menge, $(D_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\underline{K}$, $K,K'\in \mathrm{Obj}\underline{K}$ und $k_i\in \mathrm{Mor}(K,K_i)$, $k_i'\in \mathrm{Mor}(K',K_i)$ und $\overline{g}\in \mathrm{Mor}(K',K^G)$, wobei wir abkürzen: $\underline{k} = (k_i)_{i\in I}$, $\underline{k}' = (k_i')_{i\in I}$.

Es sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) K' zusammen mit den Morphismen $\underline{k}'$ und $\overline{g}$ ist untere Schranke des Diagramms (D_1)

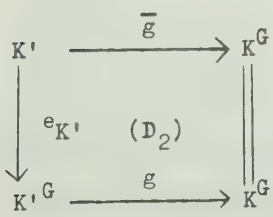


(b) Es gibt genau ein $g\in \mathrm{Mor}(K^G, K'^G)$ und $(K',\underline{k}')$ ist g-zulässig bezüglich G und $(K,\underline{k})$ und es gilt $\overline{g} = ge_K$, wobei $e_{K'}\in \mathrm{Mor}(K',K'^G)$.

Weiter gilt:

(c) K ist genau dann stark initial bezüglich $(D_i)_{i\in I}$, $\underline{k}$ und G, wenn K zusammen mit den Morphismen $\underline{k}$ und e_K Limes des Diagramms (D_1) ist.

Beweis: (a) impliziert (b): Auf $\overline{g}$ wenden wir den Funktor G an und erhalten mit $g := \overline{g}^G$ nach dem Diagramm (D_2) $\overline{g} = ge_{K'}$. Daß $(K',\underline{k}')$ g-zulässig bezüglich $(D_i)_{i\in I}$, $(K,\underline{k})$ und G ist, erhält man



aus der Gleichung $k_i{}^G g = k_i'^G$, die sich aus $e_{D_i} k_i' = k_i{}^G \overline{g}$ ergibt.

(b) impliziert (a): Wir haben $k_i{}^G g = k_i'{}^G$ und $\overline{g} = g e_{K'}$ zur Verfügung. G auf die Familie $\underline{k}'$ angewendet, ergibt mit den Transformationsmorphismen die Gleichung $e_{D_i} k_i' = k_i'{}^G e_{K'}$ für $i \in I$ und damit $e_{D_i} k_i' = k_i{}^G g e_{K'}$.

Beweis von (c): Ist K, $\underline{k}$, e_K Limes des Diagramms (D_1) und K', $\underline{k}'$ g-zulässig bezüglich G, $(K,\underline{k})$, so ist mit $\overline{g} := g e_{K'}$ (b) erfüllt; also ist K', $\underline{k}'$, $\overline{g}$ untere Schranke von (D_1). Es gibt genau ein $g' \in \mathrm{Mor}(K',K)$ mit $e_K\, g' = \overline{g}$ und $k_i g' = k_i'$, woraus auch $g'^G = \overline{g}^G = g$ folgt und damit nach 3.5. K stark initial bezüglich $(D_i)_{i \in I}$, $\underline{k}$ und G ist. Die Umkehrung geht analog: Ist K stark initial bezüglich $\underline{k}$ und G, so wird eine untere Schranke K', $\underline{k}'$, $\overline{g}$ des Diagramms (D_1) mit Hilfe von (b) als g-zulässig interpretiert und der nach 3.5. existierende Morphismus $g' \in \mathrm{Mor}(K',K)$ erfüllt $k_i g' = k_i'$ und wegen $g'^G = g$ auch $e_K\, g' = \overline{g}$. Da e_K ein Monomorphismus ist, folgt die Eindeutigkeit von g'.

4.3. Bemerkung: Die Nützlichkeit, Initialität für beliebige Diagramme zu definieren, zeigt sich in der folgenden Betrachtung (vgl. auch 3.10.) : (c) gilt auch für beliebige Diagramme $D : \underline{I} \longrightarrow \underline{K}$ (s. 4.1. und 3.6.) Wir sehen deshalb unter denselben Voraussetzungen wie in 4.2. den folgenden Sachverhalt ein: Ist $(\underline{K},\underline{k})$ stark initial bezüglich $\underline{k}$, G und D und ist K^G mit $\underline{k}^G$ Limes von GD in $\underline{G}$, dann ist $(\underline{K},\underline{k})$ Limes von D. Denn jede untere Schranke von D läßt sich wegen der Limeseigenschaft von K^G zu einer unteren Schranke von einem Diagramm der Art (D_1) erweitern (statt der diskreten

Familie (D_i) betrachten wir das gesamte Diagramm D zusammen mit GD, wobei die e_{D_i} natürlich sind) und bezüglich dieses Diagramms hat $K,\underline{k},e_K$ Limeseigenschaft.

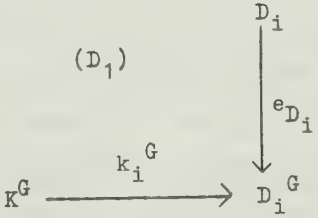
4.4. Satz: $\underline{K}$ sei eine E-Kategorie und habe verallgemeinerte Pullbacks, dann gilt:

(a) $\underline{K}$ ist stark E-initialisierbar.

(b) $\underline{K}$ ist stark E-finalisierbar.

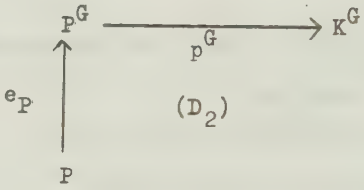
Beweis von (a): Sei $(D_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus $\underline{K}$ und $k_i{}^G \in \mathrm{Mor}(K^G, D_i{}^G)$ eine Familie von Morphismen in $\underline{G}$, $e_{D_i} \in \mathrm{Mor}(D_i, D_i{}^G)$ bezeichnen die Reflexionsmorphismen aus E.

Wir bilden von (D_1) den Limes P,p, (p_i) mit $p \in \mathrm{Mor}(P,K^G)$, $p_i \in \mathrm{Mor}(P,D_i)$, der ein verallgemeinertes Pullback ergibt.



Es ist p ein Monomorphismus, denn seien $y,x \in \mathrm{Mor}(Z,P)$ mit $px = py$, dann gilt $e_{D_i}\, p_i x = k_i{}^G px = k_i{}^G py = e_{D_i} p_i y$, und da e_{D_i} Monomorphismen sind, gilt $p_i x = p_i y$ und aus der Limeseigenschaft folgt $x = y$. Nun ist $K^{GF} = K^F$ zusammen mit den Morphismen $k_i{}^{GF} = k_i{}^F \in \mathrm{Mor}(K^F, D_i)$ und $e \in \mathrm{Mor}(K^F, K^G)$ ebenfalls untere Schranke von (D_1). Es gibt also genau ein $m \in \mathrm{Mor}(K^F, P)$ mit $pm = e$ und $p_i m = k_i{}^F$. Die Anwendung von G führt zu der Gleichung $(pm)^G = 1_K G = p^G m^G$. Damit ist p^G ein Monomorphismus

(G ist Monofunktor nach 1.14.(c) und p haben wir als Monomorphismus erkannt) und besitzt einen Rechtsinversen, ist also ein Isomorphismus. Damit läßt sich das Diagramm (D_2) wegen der Gültigkeit von (Iso) mit einem Objekt $K \in V(K^G)$ und einem Isomorphismus



$p' \in Mor(P,K)$ so ergänzen, daß $p^G e_P = e_K\, p'$ gilt, wobei $e_K \in Mor(K,K^G) \bigcap E$ ist. Ist n der zu p' inverse Morphismus, so ist K zusammen mit $(p_i n)_{i \in I}$ und pn ebenfalls Limes von (D_1) und wegen $n^G = (p^G)^{-1}$ und $k_i{}^G p^G = p_i{}^G$ gilt $G(p_i n) = p_i{}^G n^G = k_i{}^G p^G n^G = k_i{}^G$ und $pn \in E$. Nach 4.2.(c) ist damit K bezüglich $(p_i n)_{i \in I}$ stark E-initial und (vgl.3.8.) $\left(K, (p_i n)_{i \in E}\right)$ ist die starke E-Initialisierung von $\left(K^G, (k_i{}^G)\right)$.

Beweis von (b): Wir gehen von einer Familie $(D_i)_{i \in I}$ von $\underline{K}$-Objekten und einer Familie von Morphismen $k_i{}^G \in Mor(D_i{}^G, K^G)$ in $\underline{G}$ aus. Wir betrachten die Menge A (wegen der Gültigkeit von (K) ist dies möglich) derjenigen Objekte $K \in V(K^G)$, zu denen es eine Familie von Morphismen $k_{Ki} \in Mor(D_i, K)$ mit $k_{Ki}^G = k_i{}^G$ gibt. A ist nicht leer, denn $K^G \in A$. Von dem Diagramm (D_3) bilden wir den Limes P, $(p_K)_{K \in A}$, p_G, wobei $p_K \in Mor(P,K)$ für $K \in A$, $p_G \in Mor(P,K^G)$. Wie beim Beweis von (a) ist hier p_G ein Monomorphismus, da wir ein verallgemeinertes Pullback mit

$$(D_3) \quad (K \xrightarrow{e_K} K^G)_{K \in A}$$

Monomorphismen e_K vorzuliegen haben. Es gilt $e_K p_K = p_G$ für $K \in A$. K^F zusammen mit den Transformationsmorphismen $e^K \in Mor(K^F, K)$ und $e^{K^G} \in Mor(K^F, K^G)$ ist ebenfalls untere Schranke von (D_3), deshalb gibt es genau einen Morphismus $m \in Mor(K^F, P)$ mit $p_K m = e^K$ und $p_G m = e^{K^G}$. Da G Monomorphismen bewahrt, ist p_G^G ein Monormorphismus und besitzt wegen $p_G^G m^G = 1_{K^G}$ einen Rechtsinversen, ist also ein Isomorphismus. Das Diagramm (D_4) läßt sich also durch ein Objekt $K_L \in V(K^G)$ und einen Isomorphismus $n \in Mor(P, K_L)$, wegen der Gültigkeit von (Iso), ergänzen, so daß gilt $e_{K_L} n = p_G^G e_P$ und $p_G^G (n^{-1})^G = 1_{K^G}$. K_L zusammen mit den Morphismen $(p_K n^{-1})_{K \in A}$

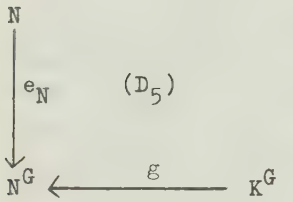
$$\begin{array}{ccc} P^G & \xrightarrow{\;p_G^G\;} & K^G \\ \uparrow{\scriptstyle e_P} & (D_4) & \\ P & & \end{array}$$

und $p_G n^{-1}$ ist Limes von (D_3). Für jedes $i \in I$ ist nun D_i mit $(k_{Ki})_{K \in A}$ ebenfalls untere Schranke von (D_3), d.h. es gibt zu jedem i genau einen Morphismus $k_i^L \in Mor(D_i, K_L)$ mit $p_K n^{-1} k_i^L = k_{Ki}$ für $K \in A$. Aus der letzten Gleichung folgt $k_i^{LG} = k_i^G$, denn: $(p_K n^{-1} k_i^L)^G = (p_G n^{-1} k_i^L)^G =$

$= p_G^G (n^{-1})^G k_i^{LG} = k_i^{LG} = k_{Ki}^G = k_i^G$.

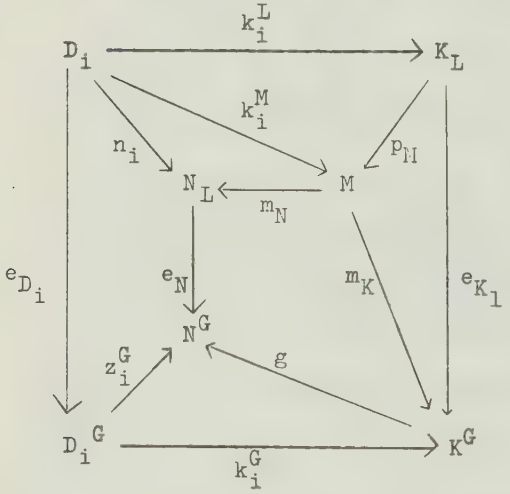
Wir zeigen nun, daß K_L bezüglich (k_i^L) stark E-final ist und nach dem, was wir eben bewiesen haben, ist dann K_L mit $(k_i^L)_{i \in I}$ die starke E-Finalisierung von $(K^G, (k_i^G))$ bezüglich (D_i). Sei dazu ein Objekt N, eine Familie $n_i \in Mor(D_i, N)$

und ein Morphismus $g \in \mathrm{Mor}(K^G, N^G)$ mit $g\, k_i{}^G = n_i{}^G$ für $i \in I$ gegeben. Wir müssen die Existenz eines $\overline{g} \in \mathrm{Mor}(K_L, N)$ mit $\overline{g}^G = g$ und $\overline{g}\, k_i = n_i$ nachweisen. Von dem Diagramm (D_5)



bilden wir das Pullback M mit den Morphismen m_N, m_K, wobei $m_N \in \mathrm{Mor}(M,N)$, $m_K \in \mathrm{Mor}(M,K^G)$ mit $e_N\, m_N = g\, m_K$ gilt. Wieder können wir, wie eben ausgeführt wurde, $M \in V(K^G)$ wählen und $m_K \in E$.

Für jedes $i \in I$ ist D_i mit den Morphismen p_i, $e_{K_L}\, k_i^L$ ebenfalls untere Schranke von (D_5), also existieren Morphismen $k_i^M \in \mathrm{Mor}(D_i, M)$ mit $m_N\, k_i^M = n_i$ und $m_K\, k_i^M = e_{K_L}\, k_i^L$.



Übersichtsdiagramm (D_6)

Nun ist $(m_K\, k_i^M)^G = (e_{K_L}\, k_i^L)^G =$

$= m_K^G\, k_i^{MG} = 1_K{}^G\, k_i^{MG} = k_i^{LG} = k_i^G$.

Das bedeutet aber, daß $M \in A$ gilt. K_L ist Limes von (D_3), deshalb gibt es einen Morphismus p_M mit $m_K\, p_M = e_{K_L}$.

Aus $e_{K_L}\, k_i^L = m_K\, k_i^M$ erhalten wir $p_M\, k_i^L = k_i^M$, denn m_K ist ein Monomorphismus.

$\overline{g} := m_N\, p_M$ löst unser Problem, denn es gilt:

$(m_N\, p_M)^G = (e_N\, m_N p_M)^G = (g\, m_K\, p_M)^G = g\, e_{K_L}{}^G = g$ und

$\overline{g}\, k_i^L = m_N\, p_M\, k_i^L = m_N\, k_i^M = n_i$.

4.5. Bemerkung: Beim Beweis von (a), in dem das Axiom (Iso) einging, haben wir zeigen können, daß in einer E-Kategorie mit verallgemeinerten Pullbacks ein Diagramm der Form (D_1) einen Limes P, p, (p_i) so besitzt, daß $P \in V(K^G)$ und $p \in E$ gilt. Wir formulieren nun: Eine Kategorie mit S-Klasse E besitzt die Eigenschaft (Pb), wenn von einem Diagramm der Form (D_7) mit $k \in Mor(K,M)$, $e \in Mor(M',M) \cap E$

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\quad k \quad} & M \\ & & \uparrow e \\ & & M' \end{array} \qquad (D_7)$$

der Limes K', e', k' (sofern er existiert) mit $e' \in Mor(K',K)$ und $k' \in Mor(K',M')$ so gewählt werden kann, daß $K' \in V(K)$ und $e' \in E$ gilt. Eine Überlegung zeigt: In einer E-Kategorie mit Pullbacks gilt (Pb). Es ist allgemeiner richtig: In einer Kategorie mit S-Klasse E, die (F), (P), (G), (I) erfüllt und Pullbacks besitzt, ist (Iso) äquivalent zu (Pb).

Wir untersuchen nun in einer E-Kategorie $\underline{K}$ für ein Objekt $K \in \underline{K}$ die Menge V(K) der mit K E-verbundenen Objekte und nennen sie den Strukturverband.

4.6. Satz: $\underline{K}$ sei eine E-Kategorie und habe verallgemeinerte Pullbacks, K sei ein Objekt in $\underline{K}$, dann gilt:

(a) V(K) ist bezüglich $<_E$ ein vollständiger Verband.

(b) Jede Familie $(D_i)_{i \in I}$ von Objekten aus V(K) hat als Infimum $\bigwedge_{i \in I} D_i$ bezüglich $<_E$ einen kategoriellen Durchschnitt, nämlich den Limes des Diagramms (D_1) $(D_i \xrightarrow{e_{D_i}} K^G)_{i \in I}$

(c) Ist $\underline{K}$ covollständig, dann stimmt Supremum einer Familie $(D_i)_{i\in I}$ von Objekten aus V (K) mit einem kategoriellen Codurchschnitt, nämlich dem Colimes des Diagramms

$(K_i^F \xrightarrow{e^{D_i}} D_i)_{i\in I}$ überein.

Beweis von (a) und (b): V(K) besitzt ein bezüglich $\leq_E$ kleinstes Element K^F und ein größtes K^G. Zu einer Familie $(D_i)_{i\in I}$, deren Elemente wir o.B.d.A. als voneinander verschieden voraussetzen können, gibt es Morphismen $e_{D_i} \in \mathrm{Mor}(D_i, K^G) \cap E$. Nach Voraussetzung können wir den Limes P, (p_i), p von (D_1) $D_i \xrightarrow{e_{D_i}} K^G$ bilden, wobei $p_i \in \mathrm{Mor}(P, D_i)$ und $p \in \mathrm{Mor}(P,K^G)$ mit $e_{D_i} p = p_i$ für $i \in I$ gilt. Nun braucht P zwar nicht in V(K) zu liegen, aber: K^F zusammen mit $e^{D_i} \in \mathrm{Mor}(K^F,D_i)$ und $e^{K_G} \in \mathrm{Mor}(K^F,K^G)$ ist ebenfalls untere Schranke, so daß ein $k \in \mathrm{Mor}(K^F,P)$ so existiert, daß $p_i k = e^{D_i}$ und $pk = e^{K_G}$ gilt. Wie beim Beweis von 4.4.(a) erhalten wir, daß p^G ein Isomorphismus ist, und damit können wir mit dem Axiom (Iso) ein Objekt K_L, einen Isomorphismus $m \in \mathrm{Mor}(P,K_L)$ so finden, daß $p^G e_P = e_{K_L} m$ gilt. K_L ist zusammen mit $(p_i m^{-1})$ und pm^{-1} ebenfalls Limes von (D_1) und es gilt $(pm^{-1})^G = p^G(m^{-1})^G = 1_{K^G}$, also $pm^{-1} \in E$ und wegen $e_{D_i} p_i m^{-1} = pm^{-1}$ für $i \in I$ folgt damit nach 1.1.(2') $p_i m^{-1} \in E$. Mit den Bezeichnungen $e := pm^{-1}$, $e_i := p_i m^{-1}$ erhalten wir: X_L mit e, (e_i) ist Limes von (D_1). X_L ist nun bezüglich $\leq_E$ auch Infimum

von $(D_i)_{i\in I}$, denn jede untere Schranke der (D_i) in V(K) bezüglich $<_E$ ist auch untere Schranke im kategoriellen Sinn und umgekehrt. Ist andererseits X_L das Infimum der (D_i), so ist es auch Limes von (D_1), denn wir können den Limes von (D_1) bilden und dieser ist, wie wir eben gezeigt haben, isomorph zu X_L.
(c) ist dual zu (b).

4.7. Definition: Eine Familie $(k_i)_{i\in I}$, $k_i \in \mathrm{Mor}(K',K_i)$ für $i\in I$ in einer E-Kategorie, die von einem Objekt K' ausgehen, heißt Ziel-äquivalent, wenn für i, $j\in I$ gilt $k_i{}^G = k_j{}^G$. Ein Morphismus $k\in \mathrm{Mor}(K',K)$ heißt zu der Ziel-äquivalenten Familie (k_i) Ziel-äquivalent, wenn die um den Morphismus k erweiterte Familie Ziel-äquivalent ist, oder wenn für alle $i\in I$ $k_i{}^G = k^G$ gilt.

Bemerkung: Ist eine Familie (k_i) von Morphismen Ziel-äquivalent in einer E-Kategorie, so ist dies gleichbedeutend damit, daß $k_i{}^F = k_j{}^F$ für i, $j\in I$ gilt. Weiter ist für eine solche Familie $K_i\in V(K)$ für alle $i\in I$ und ein festes Objekt K, denn aus $k_i{}^G = k_j{}^G$ folgt insbesondere, daß die Zielobjekte von $k_j{}^G$ und $k_i{}^G$ übereinstimmen, es gilt also $K_i{}^G = K_j{}^G$ für i, $j\in I$. Der duale Begriff lautet dann: Eine Familie von Morphismen $(k_i)_{i\in I}$, $k_i\in \mathrm{Mor}(K_i,K')$, die in ein Objekt K' hineinführen, heißt Quellen-äquivalent, wenn $k_i{}^F = k_j{}^F$ für i, $j\in I$ gilt.

4.8. Korollar zu 4.6.: $\underline{K}$ sei eine E-Kategorie mit verallgemeinerten Pullbacks, $\underline{k} = (k_i)$, $k_i \in \mathrm{Mor}(K', D_i)$, $i \in I$ eine Familie Ziel-äquivalenter Morphismen, dann gibt es genau einen Morphismus $k \in \mathrm{Mor}(K', D)$, wobei $D := \bigwedge_{i \in I} D_i$, der zu $(k_i)_{i \in I}$ Ziel-äquivalent ist.

Beweis: D ist bildbar, da nach 4.7. alle D_i aus einem $V(K)$ stammen. D zusammen mit Morphismen $d_i \in \mathrm{Mor}(D, D_i) \cap E$ und $d \in \mathrm{Mor}(D, K^G) \cap E$ ist nach 4.6. Limes von (D_1) in 4.4.(b). K' mit der Familie (k_i) und dem Morphismus $k' e_{K'}$, wobei $e_{K'} \in \mathrm{Mor}(K', K'^G) \cap E$, $k' \in \mathrm{Mor}(K'^G, K^G)$ mit $k_i{}^G = k'$ für $i \in I$ gilt, ist ebenfalls untere Schranke von (D_1). Deshalb gibt es genau ein $k \in \mathrm{Mor}(K', D)$ mit $d_i k = k_i$ und $dk = k' e_{K'}$. Aus der letzten Gleichung folgt mit $k^G = k'^G = k'$ die Behauptung, d.h. k ist Ziel-äquivalent zu (k_i).

4.9. Bemerkung: Ist $(K, \underline{k})$ mit $\underline{k} = (k_i)$, $k_i \in \mathrm{Mor}(K, D_i)$ für eine Familie $(D_i)_{i \in I}$ von Objekten aus $\underline{K}$ bezüglich $\underline{k}$ schwach E-initial und besitzt $\underline{K}$ verallgemeinerte Pullbacks, so ist K bezüglich $\underline{k}$ stark initial, denn K ist das Infimum aller K', $\underline{k}'$ mit $K' \in V(K)$ und $\underline{k}'^G = \underline{k}^G$ und die starke Initialisierung von $(K^G, \underline{k}^G)$ hat dieselbe Eigenschaft.

Wir gehen nun auf bireflektive Unterkategorien von E-Kategorien ein.

4.10. Definition: Eine Unterkategorie $\underline{U}$ einer E-Kategorie heißt stark (schwach) E-initial abgeschlossen, wenn für

jedes Diagramm $D : I \longrightarrow \underline{K}$ mit $D(I) \subset \underline{U}$ und für jede untere Schranke $(K,\underline{k})$ von D, die stark (schwach) E-initial bezüglich $\underline{k}$ ist, gilt: $K \in Obj\underline{U}$.

4.11. Satz: $\underline{K}$ sei eine E-Kategorie und $\underline{U}$ eine volle, isomorphie-abgeschlossene Unterkategorie von $\underline{K}$, dann sind äquivalent:

(1) $\underline{G} \subset \underline{U}$ und $\underline{U}$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Limites.

(2) $\underline{U}$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Limites und es gilt:

(*) Für jedes $K \in Obj\underline{K}$ gibt es ein $K^U \in V(K) \cap Obj\underline{U}$ mit $K <_E K^U$.

(3) $\underline{U}$ ist stark E-initial abgeschlossen und es gilt (*).

Hat $\underline{K}$ zusätzlich verallgemeinerte Pullbacks, so sind (1), (2) und (3) äquivalent zu jeder der folgenden Bedingungen:

(4) $\underline{U}$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Limites und es gilt:

(**) Für alle $K \in Obj\underline{K}$ gibt es ein $K^U \in V(K) \cap Obj\underline{U}$, so daß für alle $K' \in V(K) \cap Obj\underline{U}$ mit $K <_E K'$ gilt $K^U <_E K'$.

(5) $\underline{U}$ ist stark E-initial abgeschlossen und es gilt (**).

(6) $\underline{U}$ ist schwach E-initial abgeschlossen und es gilt (*).

(7) $\underline{U}$ ist bireflektiv in $\underline{K}$ mit Elementen aus E als Reflexionsmorphismen.

Beweis (a): (1) impliziert (2). Wegen $\underline{G} \subset \underline{U}$ ist für jedes $K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ das Objekt $K^G \in V(K) \cap \mathrm{Obj}\underline{U}$ und es gilt ja $K <_E K^G$ (1.12.(c)).

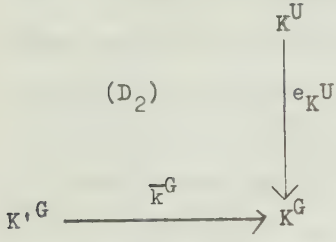
(b): (2) impliziert (3). Ist $(\underline{K}, \underline{k})$ stark E-initial bezüglich $\underline{k} = (k_i)$, wobei $k_i \in \mathrm{Mor}(K, D_i)$ mit $D_i \in \mathrm{Obj}\underline{U}$ für $i \in I$ gilt, dann ist nach 4.2.(c) K Limes des dort angegebenen Diagramms, das nach der Voraussetzung (*) ganz in $\underline{U}$ liegt. Als Limes gehört K zu $\underline{U}$.

(c): (3) impliziert (1). Zu K^G gibt es $K^{GU} \in \mathrm{Obj}\underline{U}$ mit $K^G <_E K^{GU}$, da K^G Maximum in $V(K^G)$ ist, folgt $K^G \in \mathrm{Obj}\underline{U}$. Da $\underline{U}$ volle Unterkategorie von $\underline{K}$ ist, folgt, daß $\underline{G}$ Unterkategorie von $\underline{U}$ ist. Sei nun $D : \underline{I} \longrightarrow \underline{U}$ ein Diagramm und $(K, \underline{k})$, $\underline{k} = (k_i)$ dessen Limes in $\underline{K}$, so ist nach 4.3. und 1.14.(c) K stark E-initial bezüglich $\underline{k}$.
Unter der Voraussetzung, daß $\underline{K}$ verallgemeinerte Pullbacks hat, zeigen wir:

(d): (2) impliziert (4). Sei $K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$. Wir betrachten die Menge aller K_U mit $K <_E K_U$ d.h. $K_U \in \mathrm{Obj}\underline{U} \cap V(K)$ und bilden von (D_1): $K_U \xrightarrow{e_{K_U}} K^G$ den Limes K^U, (k_U), k mit $k_U \in \mathrm{Mor}(K^U, K_U)$, $k \in \mathrm{Mor}(K^U, K^G)$. Nach 4.5. erhalten wir $K^U \in V(K)$, $k \in E$ und damit $k_U \in E$. $\underline{U}$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Limites und eine volle Unterkategorie, deshalb erhalten wir $K^U \in \mathrm{Obj}\underline{U}$ und k_U, $k \in \mathrm{Mor}\underline{U}$. Ist $K' \in \mathrm{Obj}\underline{U}$ mit $K <_E K'$, dann gilt $K^U < K'$, da K' unter den K_U vorkommt.

(e): (4) impliziert (7). Die Zuordnung K zu K^U ist funktoriell. Sei $k \in \mathrm{Mor}(K', K)$ gegeben, und seien

$e'_U \in \mathrm{Mor}(K',K^U)$ und $e_U \in \mathrm{Mor}(K,K^U)$ die Morphismen aus E. Mit $\overline{k} := e_U k$ bilden wir das Diagramm



(D_2) und davon den Limes $K'',k',e_{K''}$ mit $k' \in \mathrm{Mor}(K'',K^U)$, den wir nach 4.5. so wählen können, daß $e_{K''} \in \mathrm{Mor}(K'',K'^G) \cap E$ und damit $K'' \in V(K')$ gilt. Nach Voraussetzung folgt damit $K'' \in \mathrm{Obj}\underline{U}$. Nun ist K' mit e_K, $e_U k$ ebenfalls untere Schranke von (D_2) und aus den Eigenschaften von E ergibt sich deshalb $K' \leqslant_E K''$. Weiter ist $K' \overset{U}{\leqslant}_E K''$ mit $e'' \in \mathrm{Mor}(K'^U,K'') \cap E$ und $k'e'' =: k^U$ ist der gesuchte Morphismus $k^U \in \mathrm{Mor}(K'^U,K^U)$. Aus dieser Konstruktion folgt auch, daß $(\ )^U$ ein Reflektor ist mit den Transformationen e_U.

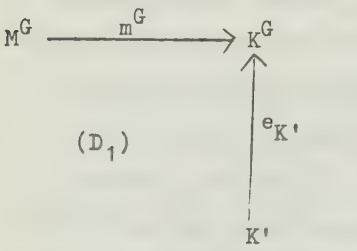
(f): Aus (7) folgt nun (2), da die Eigenschaften von E (*) garantieren und $\underline{U}$ als bireflektive Unterkategorie abgeschlossen ist gegenüber Bildung von Limites. Die Richtung (4) folgt (5) wird wie (b) gezeigt und aus (5) folgt trivialerweise (2). Aus (6) folgt (5), da nach 4.9. schwache mit starker E-Initialität unter unseren Voraussetzungen übereinstimmen und da man die Aussage (**) aus (*) wie in (d) erhält. Die Umkehrung der letzten Aussage ergibt sich aus 3.9..

Der nächste Satz gibt den Zusammenhang an, der zwischen vollständigen E-Kategorien und Top-Kategorien besteht.

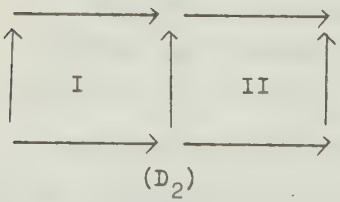
4.12. Satz: $\underline{K}$ sei eine E-Kategorie mit verallgemeinerten Pullbacks, dann läßt sich die Zuordnung $p^* K := V(K)$ für

$K \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ auf Morphismen so erweitern, daß eine topologische Theorie (s.WYLER [10]) $p^* : \underline{K}^d \longrightarrow \mathrm{ORD}$ entsteht.

Beweis: Nach 4.6. ist $V(K)$ ein vollständiger Verband bezüglich $<_E$. Wir definieren p^* auf Morphismen durch die folgende Konstruktion: Sei $M, N \in \mathrm{Obj}\underline{K}$ und $m \in \mathrm{Mor}(M,K)$, $k' \in V(K)$. Wir betrachten das Diagramm (D_1) und bilden das Pullback



M', m', $e_{M'}$ davon, mit $m' \in \mathrm{Mor}(M',K')$, $e_M \in \mathrm{Mor}(M',M^G)$, das wir nach 4.5. aus $V(M)$ wählen können mit $e_{M'} \in E$. Wir definieren $p^*m\,(K') = M'$ und erhalten so eine Abbildung wegen der Limeseigenschaft des Pullbacks und 1.1.(3a). Diese Zuordnung ist funktoriell, da bei einem Diagramm der Form (D_2) das äußere Rechteck ein Pullback



ist, wenn (I) und (II) Pullbacks sind. Die Abbildung p^*m bewahrt Infima: Sei dazu $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten mit $K_i \in V(K)$ für $i \in I$. Das Infimum $\bigwedge K_i =: K_D$ in $V(K)$ bezüglich $<_E$ ist nach 4.6. der Limes von (D_3)

$$(D_3) \quad K_i \xrightarrow{e_{K_i}} K^G$$

Die zugehörigen Morphismen bezeichnen wir mit $e_i^K \in \mathrm{Mor}(K_D,K_i)$. Für jedes $i \in I$ erhalten wir $M_i := p^*m\,K_i$ als Pullback mit den Morphismen e_{M_i}, m_i, $e_{M_i} \in \mathrm{Mor}(M_i, M^G) \cap E$, $m_i \in \mathrm{Mor}(M_i,K_i)$ wobei $m_i^G = m^G$ gilt. Sei $M_D := \bigwedge_{i \in I} M_i$, wobei nach 4.6.

$$M_i \xrightarrow{e_{M_i}} M^G$$

(D_4)

M_D Limes von (D_4) ist. Die zugehörigen Morphismen bezeichnen wir mit $e_i^M \in Mor(M_D, M_i)$. Nach 4.8. gibt es $m_D \in Mor(M_D, K_D)$ mit $m_i\, e_i^M = e_i^K$, also $m_D^G = m^G$.

$$\begin{array}{ccc} M^G & \xrightarrow{m^G} & K^G \\ & & \uparrow{\scriptstyle e_{K_D}} \\ & & K^D \end{array}$$

(D_5)

Nun muß die Pullbackeigenschaft von M_D, e_{M_D}, m_D bezüglich (D_5) nachgewiesen werden. Sei dazu P, p_M, p_K untere Schranke von (D_5) mit $p_M \in Mor(P, M^G)$ und $p_K \in Mor(P, K^D)$. Dann ist für jedes $i \in I$ P mit den Morphismen p_M, $e_i^K p_K$ untere Schranke des Diagramms, in dem M_i Limes ist und es gibt deshalb Morphismen $p_i \in Mor(P, M_i)$ mit $e_{M_i} p_i = p_M$ und $m_i p_i = e_i^K p_K$. Nach 4.8. gibt es ein $p \in Mor(P, M_D)$ mit $e_{M_i} p = p_i$, woraus

$e_{M_i} e_i^M p = e_{M_D} p = e_{M_i} p_i = p_M$ und $e_{K_i} m_i e_i^M p = e_{K_D} m_D p$ folgt,

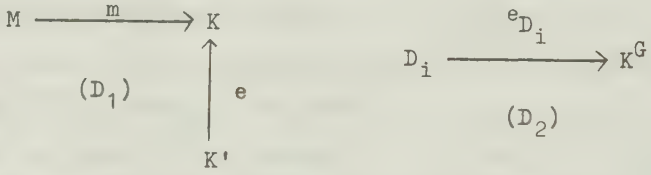
d.h. $e_{K_D} p_K = m^G p_M = m^G e_{M_i} p_i = e_{K_i} m_i p_i = e_{K_i} m_i e_i^M$

$= e_{K_i} e_i^K m_D p = e_{K_D} m_D p$, und da e_{K_D} ein Monomorphismus ist, erhalten wir $m_D p = p_K$. M_D ist somit Pullback und $p^* K^D = M_D$.

Bemerkung: Wie aus dem Beweis 4.10. hervorgeht, erhalten wir eine topologische Theorie $p' : \underline{G}^d \longrightarrow ORD$. Damit läßt sich nachweisen, daß $(\underline{K}, G)$ Top-Kategorie bezüglich p' ist.

Die Vollständigkeit und Covollständigkeit der Unterkategorie $\underline{G}$ bzw. $\underline{F}$ einer E-Kategorie $\underline{K}$ läßt nun Schlüsse auf die gesamte Kategorie $\underline{K}$ zu:

4.13. Satz: $\underline{K}$ sei eine E-Kategorie und $\underline{G}$ sei vollständig und von Diagrammen der Form (D_1) und (D_2)



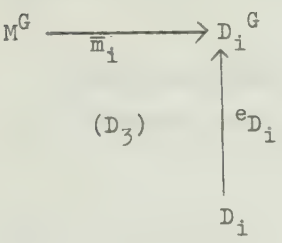
existieren Limites, wobei M, K, K' $\in$ Obj$\underline{K}$, m$\in$ Mor(M,K), e$\in$ Mor(K',K)$\bigcap$E ist und $(D_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten aus V(K) und $e_{D_i} \in$ Mor$(D_i, K^G)\bigcap$E für i$\in$ I sein soll. Dann ist $\underline{K}$ vollständig.

Zusatz: Die Bedingung, daß Diagramme der Form (D_2) Limites besitzen, läßt sich in die folgenden beiden Bedingungen zerlegen: (a) Für jedes K besitzt V(K) bezüglich $<_E$ Infima,

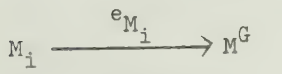
(b) zu jeder Familie $k_i' \in$ Mor(K', D_i) von Ziel-äquivalenten Morphismen, die von einem Objekt K' ausgehen, gibt es genau einen Morphismus k$\in$ Mor(K',D), wobei $D = \bigwedge_{i\in I} D_i$ das Infimum von (D_i) bezüglich $<_E$ ist, und k ist zu $(k_i)_{i\in I}$ Ziel-äquivalent.

Beweis: Wir zeigen, daß $\underline{K}$ stark E-initialisierbar ist und betrachten dazu eine Familie $(D_i)_{i\in I}$ von $\underline{K}$-Objekten und eine

Familie $\bar{m}_i \in \mathrm{Mor}(M^G, {D_i}^G)$ von Morphismen. Für jedes $i \in I$ liegt ein Diagramm der Form



(D_1) vor, von dem wir den Limes M_i, m'_i, e_{M_i} mit $m_i' \in \mathrm{Mor}(M_i, D_i)$, $e_{M_i} \in \mathrm{Mor}(M_i, M^G)$ bilden können. Nach 4.5. können wir $M_i \in V(M^G)$ und $e_{M_i} \in E$ wählen. Von dem Diagramm (D_4), wobei i alle Elemente von I durchläuft,



bilden wir den Limes M, (k_i), e_M wieder mit $M \in V(M^G)$, $e_M \in \mathrm{Mor}(M, M^G) \cap E$ und $k_i \in \mathrm{Mor}(M, M_i)$.

M ist zusammen mit den Morphismen e_M, $(m_i' k_i)_{i \in I}$ untere Schranke des Diagramms (D_3), wobei i die Menge I durchläuft und auch Limes davon. Denn sei N, n, (n_i) mit $n \in \mathrm{Mor}(N, M^G)$, $n_i \in \mathrm{Mor}(N, D_i)$ weitere untere Schranke, dann gibt es wegen der Limeseigenschaft der M_i für jedes i ein $n_i' \in \mathrm{Mor}(N, M_i)$ mit $e_{M_i} n_i' = n$ und $m_i' n_i' = n_i$, insbesondere ist N, n, (n_i') untere Schranke von (D_4). Wegen der Limeseigenschaft von M gibt es genau ein $m \in \mathrm{Mor}(N, M)$ mit $k_i' m = n_i'$ und $e_M m = n$, woraus auch $m_i' k_i' m = n_i$ folgt, da die (e_{D_i}) Monomorphismen sind. Nach 4.2.(c) ist M stark E-initial bezüglich $(m_i' n_i')_{i \in I}$.

4.14. Korollar: Unter denselben Voraussetzungen wie in 4.11. gilt, wenn G zusätzlich covollständig ist, daß K covollständig ist.

Beweis: Wir haben gezeigt, daß K vollständig ist. Damit findet 4.4. Anwendung und mit 4.4.(b) zusammen mit $4.3.^{d}$ ergibt sich die Covollständigkeit von K.

LITERATUR

[1] BOURBAKI, N.: Theory of Sets. Paris: Hermann 1968

[2] ČECH, E.: Topological Spaces. Revised edition by M. FROLIK and M. KATĚTOV. London-New York - Sidney: Interscience 1966

[3] COOK, C.H. and H.R. FISCHER: Uniform Convergence Structures. Math. Annalen 173, 290-306 (1967)

[4] CSÁSZÁR, A.: Foundation of General Topology. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press 1963

[5] FISCHER, H.R.: Limesräume. Math.Annalen, 137, 269-303 (1959)

[6] HUSEK, M.: S-Categories. Comm.Math.Univ.Carol. 5, Bd.1 37-46 (1964)

[7] MAC LANE, S.: Kategorien. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972

[8] OSIUS, G.: Eine Axiomatische Strukturtheorie. Inaugural-Dissertation. Freie Universität Berlin 1969

[9] PREUSS, G.: Allgemeine Topologie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972

[10] WYLER, O.: Top Categories and Categorical Topology. General Topology and its Applications 1, 17-28 (1971)

EINIGE SYMBOLE

Mor $\underline{K}$	Morphismenklasse der Kategorien $\underline{K}$
Iso $\underline{K}$	Klasse der Isomorphismen
Id $\underline{K}$	Klasse der Identitäten
Epi $\underline{K}$	Klasse der Epimorphismen
Mono $\underline{K}$	Klasse der Monomorphismen
Bim $\underline{K}$	Klasse der Bimorphismen (Morphismen, die gleichzeitig Epi- und Monomorphismen sind)
Mor(K,K')	Morphismenmenge zwischen zwei Objekten
V(K)	s. 1.4.
K^F, K^G	s. 1.12.
e_K, e^K	s. 1.12.
$\measuredangle_E$	s. 1.2.
E_T	s. 2.1.

Natürliche Transformationen und Familien von Morphismen werden mit kleinen, unterstrichenen, lateinischen Buchstaben bezeichnet, z.B. $\underline{k}$.

LEBENSLAUF

Am 3.Juli 1946 wurde ich, Peter F a e h l i n g, als Sohn des Verwaltungsangestellten Willi Faehling und seiner Ehefrau Magdalene Faehling, geb. Grelich, in Berlin geboren. Von 1953 bis 1959 besuchte ich die Grundschule und anschließend ein neusprachliches Gymnasium, das ich 1966 mit dem Abitur als Abschluß verließ. Im Sommer-Semester 1966 begann ich mein Mathematikstudium mit dem Nebenfach Physik an der Freien Universität Berlin und legte 1970 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik ab. Danach arbeitete ich als Teilzeitassistent am Fachbereich Mathematik der Freien Universität und bewarb mich dort im November 1970 um eine Stelle als wissenschaftlicher Assistent, die ich seit dem 1.März 1971 im Beamtenverhältnis auf Widerruf innehabe.